Chrysostome Baskiotis

LOGIQUE COMPUTATIONNELLE & PROLOG

Fascicule 1

Calcul propositionnel

EISTI

Année 2013

1.3LOGIQUE COMPUTATIONNELLE & PROLOG

Site du cours

http ://sifoci.eisti.fr

Cours de 1e année, 2e semestre.

30h00 d'enseignement décomposées en 12h00 de cours et 18h00 de TD-TP.
Examen de 3h00.

Objectif :

La logique computationnelle malgré son aspect assez théorique constitue un formidable outil pour la pratique de l'informaticien et ceci sous un double aspect :

- d'une part, comme outil de traitement de la connaissance, et
- d'autre part aide de l'industrie informatique se trouve confrontée à ce qu'on appelle *la crise du logiciel* c'est-à-dire à la difficulté de *vérifier* la conformité d'un système informatique par rapport à ses spécifications formelles et de *valider* que le comportement observé du système n'est pas différent du comportement attendu.

Ainsi, après un bref rappel de la logique propositionnelle, on étudiera la logique des prédicats qui est l'outil de base pour la logique computationnelle. On examinera ensuite l'univers et le modèle d'Herbrand qui permet de déterminer la réponse correcte d'un programme. On terminera avec l'étude de la logique floue.

L'aspect théorique de la logique computationnelle sera complété par l'apprentissage du langage de programmation Prolog qui permettra à l'élève de faire de la programmation logique en utilisant ses acquis de la logique.

Prérequis :

Mathématiques pour l'ingénieur. Théorie des graphes. Algèbre de Boole.

Professeurs :

- CERGY : **Chrysostome Baskiotis** (Cours+TD+TP), **Jean-Paul Forest** (Cours+TD+TP)
- PAU : **Yannick Le Nir** (Cours+TD+TP)

Supports du cours :

Partie logique

- Polycopié du cours.
- R. CORI & D. LASCAR :*Logique mathématique*, 2 vol. Masson, 1993
- U. NILSSON & J. MALUSZYNSKI : Logic, Programming and Prolog, 2006, à télécharger sur le site `http://www.ida.liu.se/~ulfni/lpp/`
- J. W. LLOYD : *Fondements de la programmation logique*, Eyrolles, 1988
- K. R. APT & E.-R. OLDEROG : *Verification of sequential and concurrent programs*, Springer, 1991

Partie Prolog

- W. F. CLOCKSIN & C. S. MELLISH : *Programmer en Prolog*, Éditions Eyrolles, traduction en français du livre *Programming in Prolog* aux éditions Springer-Verlag
- J. ELBAZ : *Programmer en Prolog*, Éditions Ellipses, 1991
- I. BRATKO : *Prolog, Programming for artificial intelligence*, Addison-Wesley, 1986

Supports supplémentaires

Partie Logique

- E. W. BETH : *The foundations of mathematics*, North-Holland, 1965
- G. S. BOOLOS & R. C. JEFFREY : *Computability and logic*, 3e Ed., Cambridge Univ. Press, 1989
- A. CHURCH : *Introduction to mathematical logic*, Princeton Univ. Press, 1956
- R. FRAÏSSÉ : *Cours de logique mathématique*, 2 vol., Gauthiers-Villars, 1972
- M. R. GENESERETH & N. J. NILSSON : *Logical foundations of artificial intelligence*, Morgan Kaufmann, 1987
- G. KREISEL & J. L. KRIVINE : *Éléments de logique mathématique*, Dunod, 1966
- H. RASIOWA & R. SIKORSKI : *The mathematics of metamathematics*, PWN, 1963
- D. VAN DALEN : *Logic and structure*, Springer, 1997

Partie Prolog

- T. AMBLE : *Logic programming and knowledge engineering*, Addison-Wesley, 1987
- W. F. CLOCKSIN : *Clause and Effect : Prolog programming for the working programmer*, Springer, 1997 P. DERANSART, A. ED-DBALI, L. CERVONI : *Prolog : The Standard*, Springer-Verlag, 1986 R. O'KEFFE : *The craft of Prolog*, MIT Press, 1990
- J. MALPAS : *Prolog : a relational language and its applications*, Prentice-Hall, 1987
- L. STERLING & E. SHAPIRO : *L'art de Prolog*, Éditions InterÉditions,
  et dont tous les exemples de programmes sont sur Internet, en libre accés à l'adresse du MIT : `ftp://mitpress.mit.edu`.
- J. STOBO : *Problem solving with Prolog*, Pitman, 1989

Contrôle des connaissances :

- Examen.

Remarques : Sur le site du cours vous trouverez

- Le poly du cours, réactualisé fascicule par fascicule.
- Des indications pour le cours et le TD-TP de chaque semaine.
- Des documents complémentaires.

INTRODUCTION

Sous le nom d'Intelligence Artificielle (IA) il y a plusieurs branches de Mathématiques et de l'Informatique qui se regroupent. Le cycle des cours consacré à l'IA est composé de Langages, Logique Computationnelle, Prolog, Décidabilité, Intelligence Artificielle symbolique et computationnelle et Systèmes Experts. Ce cycle est complété par l'option Génie Logiciel - Systèmes Intelligents et Complexes (GL-SICO) qui est, en partie, dédiée à l'IA. Il faut aussi signaler que la plupart des autres options font appel à diverses parties de l'IA.

Il est très difficile, voire impossible, d'avoir une définition de l'IA. La situation la plus acceptable serait d'utiliser une approche circulaire du type « l'intelligence artificielle est la résolution de problèmes par modélisation de connaissances ». En revanche il est très facile d'énumérer les disciplines qui se réclament, par elles-mêmes, comme faisant partie de cette science. Situation normale dans la mesure où l'IA se trouve au croisement des plusieurs disciplines et pour lesquelles constitue un des enjeux principaux. Mais en même temps situation embarrassante pour l'honnête homme de ce début de siècle dans sa tentative d'approcher son contenu.

Il n'est guère possible dans ce cas que de commencer par le début. Nous pouvons dire que l'objet de l'IA est la connaissance de la connaissance. Définition parallèle à celle donnée par Paul Valéry pour l'homme : « une tentative pour créer ce que j'oserai nommer l'esprit de l'esprit »([1]). Bien que l'aventure soit récente, l'histoire est ancienne. Descartes([2]) est certainement le premier qui a posé le problème de la connaissance dans sa généralité et qui a inventé une Méthode pour l'aborder. Et qui, de plus, a décrit son parcours : « Je me trouvais comme contraint d'entreprendre moi-même de me conduire. Comme un homme qui marche seul et dans les ténèbres ». En fait ce qui préoccupe Descartes au beau milieu du deuxième millénaire est l'éternel défi : régler, comme un mécanisme d'horlogerie, la démarche de l'esprit pour conquérir la connaissance, cette chimère sauvageonne et indomptable.

De ces 400 ans qui nous séparent de l'époque de Descartes, les plus importants sont les der-

1. P. Valéry Politique de l'esprit, Œuvres, Col. Pléiade.
2. Plus de 400 ans depuis sa naissance le 21 mars 1596.

niers 60 ans, pendant lesquels une véritable explosion a eu lieu à l'intérieur de l'IA. Création des nouvelles branches : réseaux neuronaux, algorithmes génétiques, machines à support vectoriel, boosting, systèmes experts, agents intelligents, apprentissage par renforcement, traitement du langage naturel, etc. Réorientation d'anciennes branches : classification, classement, reconnaissance de formes, traitement du signal, commande, régulation, etc. Le défi reste le même, peut-être légèrement déplacé : construire de façon artificielle de l'intelligence et utiliser l'intelligence ainsi construite.

Pendant ce parcours certains ont craint de perdre Descartes, d'autres l'auraient laissé volontiers au bas-côté de la chaussée. Mais lui, d'après Garcia Lorca, « petit comme une amande verte, lassé des cercles et des droites, s'enfuit par les canaux pour entendre chanter les matelots ivres ». Descartes nous faussant compagnie. Certes non ! Mais simple renouvellement du défi. Attrapons au vol ce chant « Quelqu'un m'a raconté que perdu dans les glaces, / Dans un chaos de monts, loin de tout océan, / Il vit passer sans heurt et sans fumée la masse / Immense et pavoisée d'un paquebot géant »([3]) et essayons de doter les paquebots géants mais aussi les minuscules robots-jouets avec des systèmes embarqués. Nous nous trouverons ainsi face aux limites scientifiques et techniques actuelles. Car les systèmes embarqués – et l'informatique de demain sera essentiellement une informatique embarquée – il faut qu'ils puissent planifier des actions, qu'ils puissent surmonter des situations imprévisibles, donc être capables de modifier leur programme, et, encore, qu'ils puissent, en cas de panne, de s'auto-réparer. Tâches éminemment complexes qui requièrent de la connaissance.

Ainsi le traitement de la connaissance, qui est l'objet de l'étude de l'I.A., constitue en même temps la composante principale de la science informatique([4]). Comme d'habitude dans les sciences en pareilles circonstances, nous n'avons pas une idée claire de ce que c'est l'objet de la science, à savoir la connaissance. Déjà Gaston Berger écrivait en 1941 « Il faut dire (...), en toute rigueur, que la connaissance est indéfinissable »([5]). Il est difficile de savoir si cette pensée est la conséquence de la définition circulaire donnée par Henri Bergson « Si l'instinct et l'intelligence enveloppent, l'un et l'autre, des connaissances, la connaissance est plutôt jouée et inconsciente dans le cas de l'instinct, plutôt pensée et consciente dans le cas de l'intelligence »([6]). Bergson procède à une reduction de la connaissance à l'intelligence. Peut-être en 1907 ceci était-il licite. Mais en 1921 l'intelligence devient un paysage brumeux. Une revue de psychologie demande cette année à quatorze experts de lui fournir une définition de l'intelligence et elle en récolte neuf différentes([7]) ! Si on posait la même question aujourd'hui, peut-être aurions-nous plus de définitions que d'experts. Une réponse, assez technique dans son essence, est donnée par Gaston Bachelard qui écrivit « Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. »([8]). C'est donc grâce au sujet agissant et à son action qu'il y a création

3. R. Desnos déjà 60 ans depuis sa mort en 1945 au camp de concentration de Terezine.
4. C'est, d'ailleurs, grâce à cette composante que l'informatique a passé du statut de la technique à celui de la science
5. G. Berger :Recherches sur les conditions de la connaissance. Essai d'une théorétique pure, Paris, P. U. F., 1941
6. H. Bergson : L'Évolution créatrice, Paris, 1907
7. cité par R.L.Gregory (dir.) : Le cerveau un inconnu, Robert Laffont, Paris, 1993, pp.667-668
8. G. Bachelard : La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance objective, Vrin, Paris, 1938

de la connaissance. Il est permis toutefois de douter que cette belle et très humaniste définition de Bachelard puisse être appliquée à des machines qui, au plus, peuvent espérer au statut des humanoïdes. Néanmoins nous pouvons, en utilisant cette définition et des éléments de la Théorie de l'Information, évaluer le coût et, donc, la valeur de la connaissance. C'est, comme nous le savons déjà, le nombre de questions élémentaires qu'il faut poser pour obtenir la réponse que l'on cherche. Poursuivant dans cette voie nous pouvons aussi citer une récente – et extrêmement intéressante – contribution de Hervé Zwirn. Dans un article([9]) il distingue deux types de connaissances. Une qui est une connaissance forte et se produit en ramenant un phénomène inconnu à un phénomène familier qui nous est compréhensible. De cette façon nous connaissons quelque chose parce que nous le comprenons et nous pouvons ainsi dire que nous connaissons une parcelle du monde qui nous entoure. Et une autre connaissance, qui est une connaissance faible et qui ramène un phénomène inconnu à une loi générale qui l'explique. Il est évident que la loi générale nous ne la comprenons pas. Par exemple il est impossible de comprendre la loi de la gravitation. Dans ce cas nous disons que nous connaissons le phénomène parce que nous sommes capables, en utilisant la loi générale à laquelle il obéit, de prédire son évolution. En somme nous connaissons le phénomène qui va se passer avant qui se réalise. Nous effectuons ainsi une contraction du temps. Si nous traduisons cette contraction en termes informatiques, elle revient à être une compression des données. Nous approchons ainsi, par une autre voie, l'idée d'Andrei Kolmogorov concernant la relation entre information et complexité. Selon cette approche, qui est aussi celle de Ray Solomonoff, l'information apportée par un phénomène est fonction de la longueur du code du phénomène, si on transcrit ce phénomène en code binaire. La complexité d'un phénomène est considérée comme étant relative à la longueur du code du phénomène. Si donc nous sommes capables de compresser le code binaire pour le faire exécuter et avoir des résultats avant qu'ils se produisent, nous pouvons dire que nous connaissons le phénomène. Si par contre nous ne pouvons pas effectuer une compression du code, alors nous ne sommes pas capables de connaître le phénomène. C'est ce qui se passe avec la génération des nombres aléatoires et l'évolution des processus chaotiques où nous ne connaissons pas les résultats avant qu'ils se réalisent bien que la ou les lois de leur évolution sont connues. Bien sûr il ne faut pas aller vite en besogne et affirmer que plus le phénomène est moins complexe, moins nous le comprenons plus lentement.

Pendant ce cours nous verrons d'abord les raisons pour lesquelles la logique est un excellent langage pour le traitement de la connaissance. Ensuite nous travaillerons avec la logique du premier ordre avant d'examiner des algorithmes qui conduisent à l'automatisation de l'opération d'inférence logique, opération qui permet la production des connaissances nouvelles. Tout au long de ce cours afin de favoriser la compréhension et la consolidation d'un point important soit de la théorie soit de son application, nous le faisons suivre par des ascèses que les élèves doivent résoudre. Par ailleurs chaque chapitre se termine par des exercices qui permettent aux élèves de faire un tour récapitulatif du contenu du chapitre. De plus des cours du langage Prolog s'intercaleront avec ce cours, afin que l'élève puisse avoir des applications informatiques concrètes des concepts et des méthodes de la Logique computationnelle.

---

9. H. Zwirn : Compréhension et compression, La Recherche, décembre 2002, p.111

1

INTELLIGENCE, CONNAISSANCES ET LANGAGES

L'*intelligence*, au sens propre du mot, désigne l'ensemble de fonctions mentales qui permettent à un être vivant d'adapter son comportement à son environnement. Elle depend donc de la connaissance que cet être vivant a de son environnement. Elle suppose l'intégration au niveau du système nerveux des fonctions différentes, notamment des fonctions :

- de perception de l'environnement ;
- de reconnaissance des situations ;
- de décision d'actions ;
- de mémorisation.

La tâche fondamentale, du point de vue des applications, pour l'IA est de comprendre l'intelligence afin de la rendre plus productive. Son objectif est donc le suivant :

Étant donné une tâche précise, dont l'exécution par l'homme requiert de l'intelligence, il s'agit de construire un logiciel permettant à un ordinateur d'exécuter la même tâche avec des résultats comparables à ceux obtenus par l'homme.

Deux cas sont à considérer.

Un premier où il existe un algorithme pour la résolution du problème posé. Bien que nous pouvons, sous certains aspects, envisager que cette approche peut faire partie de l'IA, nous ne la considérons pas ici.

L'autre cas est constitué par des problèmes pour lesquels soit il n'existe pas d'algorithme de résolution, soit il en existe mais il est très difficile à mettre en œvre. On cherche alors, à déterminer une stratégie de résolution, pas forcement optimale. On construit ainsi une méthode qui contient un ensemble de règles qui permettent d'effectuer, à différents stades et en fonction de la situation du moment, des choix qui favorisent, mais sans pour autant le garantir, l'aboutissement à une solution. On appelle cette démarche une *heuristique*. La raison d'être de l'IA est fondée sur le

postulat suivant :

Toute tâche cognitive peut être accomplie par un ordinateur programmé heuristiquement.

Un des axes majeurs de la démarche heuristique est constitué par la *représentation de connaissances*, à savoir la méthodologie d'organisation d'un vaste répertoire de données, de manière à pouvoir en extraire ce qui est nécessaire et pertinent au traitement d'une situation qui émerge d'un ensemble infini des possibilités. Bien sûr les outils à mettre au point pour accomplir cette tâche, n'imiteront pas nécessairement l'intelligence humaine, mais il faut qu'ils aient des performances non inférieures en précision et rapidité à celles de l'intelligence humaine.

Nous avons vu que l'intelligence humaine se fonde sur l'existence de la connaissance de l'environnement et l'exploitation de cette connaissance. Ce processus se fait de deux façons distinctes :

- une première qui consiste en l'assimilation, mémorisation et structuration des connaissances, et
- une seconde qui consiste en la décomposition et en la particularisation de la connaissance.

Par conséquent pour résoudre, de façon artificielle, un problème il faut d'une part stocker la connaissance et, d'autre part, trouver une méthode qui exploite la connaissance. Du fait que la connaissance

- est volumineuse ;
- n'est pas facile à caractériser précisément ;
- change constamment

il faut que la méthode qui exploite la connaissance :

(1) fasse surgir des généralisations. Dans ce cas il n'est pas nécessaire de représenter séparément chaque situation particulière, car les situations qui ont les mêmes propriétés importantes peuvent être groupées ensemble. Si la connaissance n'a pas cette propriété, il faut plus de place mémoire pour la stocker et plus de temps pour la traiter.

(2) soit facile à modifier afin de corriger les erreurs et/ou de prendre en compte des modifications.

(3) puisse être utilisée dans la majorité de cas, même si elle n'est pas totalement précise ou complète.

Remarquons que ce que nous avons mis en évidence sur la connaissance humaine nous pouvons le retrouver sur un ordinateur. En effet pour qu'un programme tourne sur un ordinateur, il lui faut des informations. L'exploitation des informations se fait de deux façons :

- par stockage de l'information ;
- par recherche de l'information.

Ces deux façons d'exploitation des informations sont déjà utilisées par des logiciels algorithmiques opérant sur des données numériques (c-à-d. les logiciels classiques).

La seule différence, par rapport à ces logiciels, est que l'information relative à la connaissance a, comme sera précisé au cours de l'Intelligence Artificielle, un caractère symbolique et non pas numérique. Par conséquent la méthode de résolution d'un problème de l'intelligence se traduira par la fabrication d'un logiciel non-algorithmique opérant sur des données symboliques. Le logiciel sera non-algorithmique car la résolution d'un problème d'intelligence ne peut

pas être complètement explicitée et donc programmée au sens classique du terme compte tenu du nombre important de choix à effectuer et, de plus, tous les éléments ne sont pas connus a priori. On est donc amené à fournir à de tels logiciels un ensemble d'informations de type symbolique.

Il est bien évident qu'il faut aussi fournir à l'ordinateur les règles de gestion de cet ensemble d'informations symboliques.

La résolution donc, des problèmes dans le cadre de l'IA, s'effectue à l'aide de deux modules :

(1) Un premier qui concerne l'utilisation des informations (méthodes de recherche) : accès aux informations, combinaison des informations entre elles, etc.
(2) Un second module qui est la représentation des connaissances : regroupement des informations au sein d'une base de données, dont la structure tient compte des règles de recherche précédemment établies.

L'IA s'occupe essentiellement du deuxième module. Son objectif est de pouvoir exprimer la connaissance dans une forme qui puisse être utilisée par un ordinateur. Il faut, par conséquent, trouver un langage qui permet d'assimiler, par un ordinateur, la représentation des connaissances. Comme nous le savons, un langage est déterminé en fonction de deux aspects. Un aspect syntaxique qui permet de vérifier que les phrases du langage sont écrites correctement, en respectant les règles établies de syntaxe du langage. Et un aspect sémantique qui permet de vérifier la signification des phrases du langage. En réalité ce qui nous interesse principalement est l'aspect sémantique, c'est-à-dire le sens d'une phrase. Mais pour y acceder au sens d'une phrase, il faut que cette phrase soit correcte, ce qui nous amène à examiner sa forme syntaxique. Mais il est évident qu'une phrase peut être du point de vue syntaxique correcte et, malgré cela, dépourvue de sens.

Les exigences que nous pouvons formuler à ce stade pour le langage de représentation des connaissances concernent sa capacité d'être concis et sans ambiguïtés. Il faut aussi qu'il soit indépendant du contexte, en ce sens qu'il puisse exprimer des connaissances de toute sorte. Il y a plusieurs langages, surtout informatiques, qui peuvent répondre à ses caractéristiques. Mais il y a une autre exigence, très importante, concernant la représentation des connaissances, c'est le formalisme. Nous ne pouvons pas espérer manipuler efficacement les connaissances et obtenir des nouvelles connaissances si nous ne faisons pas une approche extrêmement formelle. Dès lors il devient évident qu'un des langages les plus appropriés pour la représentation et le traitement des connaissances est la logique mathématique selon une triple démarche :

(1) Utilisation de la logique mathématique pour modéliser et stocker la connaissance.
(2) Utilisation de la logique mathématique comme un langage pour communiquer avec l'ordinateur.
(3) Utilisation de la logique mathématique comme une méthode pour la vérification des programmes.

Le cours de la Logique Computationnelle & Prolog a comme objectif de donner la possibilité à l'élève de *modéliser et formaliser, en termes de la logique computationnelle, un problème* afin qu'il puisse d'une part d'écrire des programmes logiques pour la représentation et le traitement des connaissances et, d'autre part, de procéder à la vérification des programmes.

1.1 Références

Nous donnons ci-après la liste des livres qui nous ont servi pour la redaction de ces notes.

J.-M. ALLIOT, T. SCHIEX : *Intelligence Arificielle et Informatique Théorique*, Cépadués, 1993

K. R. APT & E.-R. OLDEROG : *Verification of sequential and concurrent programs*, Springer, 1991

E. W. BETH : *The Foundations of Mathematics*, North-holland, 1965

GEORGE S. BOOLOS, RICHARD J. JEFFREY : *Computability and logic*, Third edition, Cambridge U.P., 1989

STANLEY N. BURRIS : *Logic for mathematics and computer science*, Prentice Hall, 1998

JEAN CAVAILLÉS : *Méthode Axiomatique et Formalisme*, Hermann, 1981

ALONZO CHURCH : *Introduction to mathematical logic*, Princeton Univ. Press, 1956

RENÉ CORI, DANIEL LASCAR : *Logique mathématique*, 2 volumes, Masson, 1993

DIRK VAN DALEN : *Logic and Structure*, Third edition, Springer, 1994

MICHAEL R. GENESERETH, NILS J. NILSSON : *Logical Foundations of Artificial Intelligence*, M.Kaufmann, 1987

ROBERT LKOWALSKI : *Logic for Problem Solving, North-Holland, 1979*,

J. W. LLOYD : *Fondements de la programmation logique*, Eyrolles, 1988

PER MARTIN-LÖF : *Intuitioniostic Type Theory*, Bibliopolis, 1984

ANIL NERODE, RICHARD A. SHORE : *Logic for applications*, Second edition, Springer, 1997

ULF NILSSON, JAN MAŁUSZYŃSKI : *Logic, Programming and Prolog*, Wiley, 1990

JEAN PIAGET : *Essai de logique opératoire*, Dunod, 1972

HELENA RASIOWA, ROMAN SIKORSKI : *The Mathematics of Metamathematics*, Państwowe Wyd. Nauk., 1963

H. ROGERS, JR : *Theory of recursive functions and effective computability*, MIT Press, 1987

STUART J. RUSSEL, PETER NORVIG : *Artificial Intelligence. A Modern Approach*, Prentice-Hall, 1995

MICHAEL SPIVEY : *An introduction to logic programming through Prolog*, PrenticeHall, 1995

ROBERT I. SOARE : *Recursively enumerable sets and degrees*, Springer-Verlag, 1987

ALFRED TARSKI : *Introduction to Logic and to Methodology of Deductive Sciences*, Galaxy, 1965

R. TURNER : *Logics for artificial intelligence*, E.Horwood, 1984

JACQUES ZAHND : *Logique élémentaire*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998

2

OBJECTIFS ET MÉTHODES DE LA LOGIQUE

Dans ce chapitre nous présentons les objectifs généraux de la logique computationnelle. Comme cette logique est dérivée de la logique mathématique nous présentons d'abord les éléments fondamentaux de celle-ci et en particulier les systèmes de raisonnement qu'elle utilise.

2.1 La logique comme activité humaine

Comme nous venons de voir au chapitre précédent, le comportement intelligent d'un être vivant se resume à sa capacité de s'adapter aux changements de l'environnement. Pour ce faire il y a un prérequis, c'est la connaissance de cet environnement. Sa forme la plus élémentaire est la forme descriptive, c'est-à-dire celle qui présente la connaissance à l'aide des propositions (phrases) déclaratives. À partir de ces connaissances, on doit pouvoir, grâce au raisonnement, élaborer des nouvelles connaissances ou, encore, faire resurgir des connaissances qui étaient déjà présentes sous forme latente. C'est à ce stade qu'intervient la logique.

En effet, la logique s'occupe des *raisonnements*.

Un raisonnement est un ensemble d'*hypothèses* qui conduit à une *conclusion*.

Le but de a logique est de vérifier si un raisonnement est correct, c-à-d. si, à partir des hypothèses, nous pouvons déduire la vérité de la conclusion.

Comme un exemple particulier de l'application de la logique, nous pouvons considérer qu'elle constitue un *médiateur* entre l'homme et l'ordinateur. En effet, un programme peut être assimilé à une proposition dont les instructions sont les hypothèses et le résultat attendu la conclusion. Nous pouvons donc utiliser la logique pour savoir si un programme produit le résultat escompté.

L'histoire de la logique est très longue. Aristote déjà, a formalisé une logique, qu'on appelle aujourd'hui *logique des propositions* ou *logique d'ordre 0*. Il y aussi la *logique des prédicats* (prédicat = proposition qui contient des variables). Cette logique est aussi appelée *logique d'ordre 1*. Elle sera à la base de notre travail.

Ses domaines d'applications sont très divers. Citons en particulier

- Matériel : L'unité arithmétique et logique (UAL) est construite à partir de « portes logiques »
- Validation et vérification du logiciel : Z, B, model checking, diagnostic, ...
- Intelligence artificielle : aide à la décision, systèmes experts, web sémantique, ...
- Programmation : Prolog, différents prouveurs, ...

2.2 Construction de la langue logique

L'objectif de la logique est l'analyse des propositions et l'évaluation de la valeur de vérité de ces propositions. C'est une tâche très difficile, car les langues naturelles ont évolué d'une façon pas toujours conforme avec la logique, avec comme résultat d'avoir des propositions qui sont ambiguës quant à leur signification. Exemple : « je regarde l'homme avec le télescope ». Il y a aussi des phrases qui du point de vue de la forme sont similaires mais du point de vue de la logique sont différentes. Considérons par exemple les deux raisonnements suivants, empruntés à A. Church :

- J'ai vu un portrait de John Wilkes Booth. John Wilkes Booth a assassiné Abraham Lincoln. J'ai donc vu le portrait de l'assassin d'Abraham Lincoln.
- J'ai vu le portrait de quelqu'un. Quelqu'un a assassiné Abraham Lincoln. J'ai donc vu le portrait d'un assassin d'Abraham Lincoln.

Malgré la similitude de deux propositions il y a une grande différence en ce qui concerne le sens de chacune de ces propositions : la première proposition est vraie tandis que la seconde est en général fausse.

Pour éviter des situations comme les précédentes, il faut réduire de façon drastique la richesse de la langue tant du point de vue nombre de mots utilisés que du point de vue variétés de formes employées pour une phrase. L'objectif est de créer une langue logique aussi réduite que possible, qui permettra d'analyser la validité d'un raisonnement sans faire référence à son domaine d'application et de façon automatique en utilisant des algorithmes appropriés.

Avant d'entreprendre la construction de cette langue logique, il faut résoudre un problème : Comment construire une langue logique sans présupposer la logique ?

Parfois, en mathématiques, quand on est devant un problème difficile, on procède à de tours de passe-passe qui ont le mérite de déplacer le problème. Ainsi, dans ce cas précis nous allons utiliser une astuce : la « langue logique » sera considérée comme un objet, une langue-objet, qui sera élaborée en utilisant une langue naturelle, par exemple le français.

Donc ici le français est, par rapport à la langue-objet de la logique, une langue de niveau supérieur, c-à-d. le français est une *méta-langue* vis-à-vis de la langue logique.

[N.B. Méta-"quelque chose" signifie que "quelque chose" est de niveau supérieur, d'une plus grande généralité.

Donc le français comme métalangue de la logique, signifie que le français a une plus grande généralité que la langue logique. Par exemple, le français n'est pas seulement une langue logique ![]

En jargonnant, on appellera dorénavant la langue-objet de la logique un *langage logique*.

On aboutit ainsi à la conclusion selon laquelle le français sera utilisé comme méta-langue pour élaborer le language logique.

Le problème donc est maintenant comment utiliser le français pour construire une langue logique et effectuer, avec son aide, des calculs ?

2.3 Constitution d'un langage logique

Puisque le langage logique doit être applicable à n'importe quelle situation, il faut qu'il soit formel, au contraire de la langue naturelle qui, bien sûr, elle est informelle. Comme à l'aide de ce langage, on doit pouvoir exprimer toute proposition dans n'importe quelle situation d'une quelconque activité humaine, il faut, dans ce langage, remplacer les mots par des symboles qui expriment des objets, des concepts ou, encore, des opérateurs propres à une activité humaine particulière. Pour ce faire, il faut, étant donnée une phrase exprimée dans la langue courante, de séparer, par une démarche d'abstraction, le contenu de la phrase de sa forme. En ne gardant que la forme de la phrase, nous pouvons construire un langage formel qui, en se complétant, sera en mesure d'exprimer la totalité des phrases que nous pouvons formuler en utilisant une langue.

Pour réaliser cette abstraction qui conduit à la formalisation, nous avons besoin de déterminer les ingrédients d'une phrase et aussi leur représentation formelle. Nous distinguons ainsi les éléments suivants pour une phrase :

Les noms Nous avons d'abord les *noms propres* qui peuvent indiquer :

- soit n'importe quelle personne qui porte ce nom, par exemple *Toto* ;
- soit une personne particulière, par exemple *Berlioz*.

Remarquons que dans ce dernier cas on peut faire référence à un nom propre par périphrase, par exemple *le compositeur de la symphonie fantastique*. Cette remarque nous aide à comprendre qu'en logique un nom n'est pris en compte que par ce qu'il *dénote,* donc *Berlioz* et *le compositeur de la symphonie fantastique* dénotent la même personne. Malgré tout, la difficulté n'est pas complètement surmontée, car s'il est loisible (en suivant Bertrand Russel) de s'interroger si *Berlioz est le compositeur de la symphonie fantastique*, il est, par contre, sot de se poser la question si *Berlioz est Berlioz*. Il y a donc quelque chose de plus que la dénotation que véhicule un nom ; c'est son *sens* d'où découlent d'ailleurs, l'existence et l'unicité de la dénotation.([1])

Nous avons aussi les *noms communs* qui, à leur tour, possèdent un sens et, par conséquent, dénotent ainsi quelque chose, qu'il s'agisse d'un objet, d'un être vivant ou d'un concept. La langue commune fait que beaucoup des noms communs ont des sens additionnels qui font que leur signification originelle dévie. Par exemple le nom commun *poirier* qui, dans sa

1. Le premier à faire cette distinction fut G. Frege en 1892. Selon lui un terme dénote (fait référence) à un individu particulier. Le sens du terme est la condition qu'un individu particulier doit remplir pour être la dénotation (le référant).

signification originelle, dénote un arbre fruitier, ne retrouve pas ce sens quand on dit qu'un enfant fait *le poirier*.

Pour un nom commun la dénotation (ou référence) est le concept qui désigne, tandis que son sens est donné par sa valeur de vérité. Carnap([2]) en suivant Frege, propose de considérer comme dénotation d'un mot commun son *extension*, c-à-d. l'ensemble des objets qui sont désignés par ce mot et comme sens son *intension* (ou, encore, sa *compréhension*), c'est-à-dire la fonction qui permet de savoir si un objet donné peut être référencé par ce mot.

En langage formel nous représenterons les noms propres, qui ont une seule dénotation, par des *constantes* qui seront notées $a, b, c, \ldots$. Nous réserverons les *variables* pour les noms communs ou les noms propres qui ont plusieurs dénotations, par exemple *Toto*. Les variables seront notées $X, Y, Z, \ldots$. Notez l'usage des lettres majuscules. La distinction entre constantes et variables se fait en Prolog de cette façon : toute constante commence par une lettre minuscule et toute variable par une lettre majuscule. Remarquons que les valeurs numériques sont des constantes.

Les qualités Ce qui est dénoté par un nom, propre ou commun, a des qualités diverses qui s'expriment en utilisant d'autres noms. Ceux-ci sont bien entendu, des valeurs des ces qualités, considérées comme des fonctions sur celui-là. Par exemple *rouge* est la valeur de qualité *couleur* appliquée, comme une fonction, au *petit livre* (de celui que vous savez). Cette fonction a, comme n'importe quelle fonction mathématique, un domaine de définition et un domaine des valeurs qui est son image. Pour des raisons qui s'éclairciront par la suite (cf. paragraphe suivant), nous l'appellerons *foncteur*.

Les propriétés Indépendamment de ses qualités, ce qui est dénoté par un nom, propre ou commun, a aussi des propriétés. Une propriété quelconque appliquée sur un objet soit elle se vérifie, soit non. Elle peut donc être considérée comme une fonction sur l'objet dont l'image se réduit à l'ensemble {vrai, faux}. Une telle fonction s'appelle un *prédicat* ou, encore, *fonction propositionnelle* et qu'il ne faut pas confondre avec le foncteur défini précédemment. .

Les propositions Une proposition dans la langue courante est un assemblage des mots qui ont un sens et qui expriment une pensée. S'il s'agit d'une affirmation, nous avons une proposition sous forme déclarative. En langage formel la proposition joue le même rôle et nous utilisons uniquement des propositions sous forme déclarative. Dans la mesure où une proposition a un sens, elle peut être vraie ou fausse. Nous pouvons donc lui associer une fonction de vérité qui prend deux valeurs – vrai ou 1 et faux ou 0.

Nous pouvons envisager que les propositions peuvent être représentées par des variables qui prennent deux valeurs, vrai ou faux. Ce sont des *variable propositionnelle* et seront notées par $p, q, \ldots$. Remarquons que la formalisation d'une proposition conduit à la définition d'une variable propositionnelle.

La proposition est la forme la plus achevée du langage que nous utiliserons et, comme nous l'avons déjà indiqué, l'objectif de la logique est d'analyser ces propositions et d'évaluer leur valeur de vérité. Depuis Aristote on sait que cette évaluation dépend plutôt de la forme de la pro-

2. R. Carnap : *Meaning and necessity*, Un. Chicago Press, 1956

position que de son contenu([3]). L'évaluation se fait en utilisant différents types de raisonnement que nous présentons brièvement ci-après :

Raisonnement déductif C'est la forme la plus connue et la seule utilisée par la logique classique. Il permet, en partant d'une loi générale, d'obtenir – de déduire – des faits particuliers. Le fameux exemple

Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme
Donc, Socrate est mortel

est l'archetype du raisonnement déductif et qui de façon formelle s'écrit comme suit :

Tous les A sont B.
C est A.
Donc, C est B.

Pour la compréhension de la suite du chapitre nous transformons l'exemple précédent comme suit :

Tous les êtres vivants sur Terre sont mortels.
Socrate est un être vivant sur Terre.
Donc Socrate est un mortel.

Il faut remarquer que le raisonnement déductif ne permet pas d'obtenir des nouvelles connaissances. Il permet seulement de rationaliser et de codifier une démarche qui consiste à prendre un élément d'une famille et à lui attribuer une propriété que tous les éléments de la famille possèdent, en faisant ainsi resurgir une connaissance latente.

Raisonnement inductif Ce raisonnement est attribué à Bacon et il suit la démarche inverse du raisonnement déductif. À partir d'un ensemble des faits particuliers qui ont tous un élément en commun, on érige cet élément commun en loi générale. Par exemple :

Ces êtres vivants (Socrate, Héraclite, Parménide, ...) sont sur la Terre.
Ces êtres vivants (Socrate, Héraclite, Parménide, ...) sont mortels.
Donc, tous les êtres vivants qui sont sur la Terre sont mortels.

Sa traduction formelle est la suivante :

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont B.*
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont C.*
Donc, tout B est C.

Il est évident que pour appliquer ce raisonnement il faut disposer de plusieurs observations. Sa base scientifique est la loi de grands nombres. Néanmoins il faut se rappeler que l'induction permet d'établir des lois expérimentales mais non pas des lois théoriques. Ce raisonnement est donc à la base de la méthode expérimentale, c'est-à-dire à la base des

3. Il s'agit d'une situation qui n'est pas exceptionnelle en mathématiques. Par exemple, en théorie d'information, nous savons que l'information d'un message ne dépend pas de son contenu mais de la complexité de sa forme. Nous pouvons, en faisant des observations à d'autres disciplines, de s'apercevoir que souvent, en mathématiques, pour pouvoir faire un calcul on doit abandonner la matérialité du contenu pour l'idéalité de la forme.

sciences (physique, chimie, ...) où une loi reste vraie tant qu'il n'y ait pas un contre-exemple la refutant([4]). En ce sens il permet la production des nouvelles connaissances, qui peuvent éventuellement être potentiellement fausses.

Raisonnement abductif Il relie les effets aux causes et suggère une hypothèse. Par exemple :

Tous les êtres vivants qui sont sur la Terre sont mortels.

Ces êtres vivants (Socrate, Héraclite, Parménide, ...) sont mortels.

Donc, ces êtres vivants (Socrate, Héraclite, Parménide, ...) sont sur la Terrre.

que nous pouvons exprimer de manière formelle :

Tous les A qui sont B sont aussi C.

D est C.

Donc, D est B.

Ce type de raisonnement a été introduit par Peirce qui l'a défini comme étant une adoption probatoire d'une hypothèse. Dans son esprit il s'agissait d'un raisonnement inductif allegé. En effet le raisonnement inductif, en se fondant sur un ensemble d'observations qui ont toutes un élément commun, forge une observation générale relative à cet élément commun et, par conséquent, cette observation générale revêtirait le statut de règle générale permettant ainsi de tirer des conclusions. Par contre la conclusion d'un raisonnement abductif est une hypothèse choisie dans un ensemble d'hypothèses, en raison de sa plausibilité. Ainsi le fait de vivre sur Terre apparaît comme une cause de la mortalité des êtres vivants. Mais elle est une cause parmi d'autres.

Le raisonnement abductif a été appliqué au calcul logique par Kowalski et Kakas. Ce raisonnement construit aussi des nouvelles connaissances qui ont en réalité un statut très précaire.

Raisonnement par analogie Il s'agit du plus faible type de raisonnement. En effet il ne fournit aucune certitude et il est surtout utilisé en justice pour établir des jugements en exploitant la jurisprudence. Un exemple de raisonnement par analogie est le suivant.

Socrate est un être vivant sur Terre et qui est mortel.

Héraclite est un être vivant sur Terre et qui est comme Socrate.

Donc Héraclite est mortel.

L'aspect formel de ce raisonnement est le suivant

A est P.

B est similaire à A.

Donc, B est P.

Une forme encore plus attenuée du raisonnement par analogie est la suivante :

A et B sont P.

A est S.

Donc, B est S.

4. C'est justement cette remarque qui permet à Karl Popper de distinguer les sciences des croyances, car les premières sont, selon lui, réfutables au contraire des secondes.

Ce raisonnement peut conduire à des erreurs et à des fausses croyances solidement ancrées dans la mesure ou elles sont, à l'instar des conclusions du raisonnement lui-même, non démontrables.

De tous les raisonnements que nous venons de voir, seulement le raisonnement déductif fournit la garantie de la validité du résultat.

2.4 Logiques formelle et computationnelle

La logique est la branche des mathématiques qui étudie les lois de la pensée. Son objectif est de former de règles qui permettent de penser correctement. Transposée à l'informatique, la logique permettrait d'écrire des programmes corrects. Écrire un programme reviendrait ainsi à appliquer un ensemble de règles de la logique.

La *logique formelle* est une version decontextualisée de la logique. En tant que telle elle a :

- un langage formel ;
- une syntaxe sans ambiguïtés ;
- une sémantique précise, et
- des règles de formation des propositions.

Pour formaliser dans ce langage une phrase comme par exemple *Toto aime la logique* on doit utiliser différents types de symboles. Nous présenterons en detail ces symboles dans les deux chapitres suivants.

La représentation d'une phrase par un langage formel correspond à une représentation des connaissances. Si on veut faire un traitement des connaissances, il faut pouvoir faire un raisonnement en utilisant la représentation formelle de ces connaissances et appliquer les différents types de raisonnement. Pour que le traitement soit efficace il faut envisager son automatisation, c'est-à-dire avoir un procédé mécanique qui applique aux phrases de la logique, des règles de raisonnement d'une façon systématique.

La *logique computationnelle* est une branche qui se trouve au croisement de la logique mathématique et de l'informatique et dont son objectif est d'élaborer les bases théoriques pour la construction des tels procédés mécaniques qui, en réalité, sont ici des programmes informatiques. Elle recupère donc toutes les préoccupations de la logique formelle qui sont relatives aux approches syntaxique et sémantique des raisonnements, auxquelles elle rajoute sa propre préoccupation concernant l'efficacité du raisonnement.

Plus particulièrement la logique computationnelle joue un rôle important au *test des modèles* (model-checking) qui est actuellement une de techniques les plus utilisées pour la vérification et le déverminnage des programmes. Dans ce cadre la logique examine ce qui peut être écrit dans un langage formel - et qui fait partie du domaine de la syntaxe - et la façon dont ce qui est écrit, est interprété par un modèle concret - ce qui constitue le domaine de la sémantique.

L'utilisation de la logique est devenu indispensable dès qu'on a introduit l'ordinateur à l'automatisation des diverses tâches. Prenons l'exemple de la conduite d'une rame de métro. Si le conducteur est un être humain, il dispose d'un certain nombre d'actionneurs - frein, vitesse, ouverture/fermeture des portes, ... - sur lesquels agit directement. Si par exemple il rencontre un feu rouge, il appuiera sur le frein. Cette action est conséquence d'une démarche logique qui est issue

d'un modèle interne propre au conducteur et qui représente, sous forme symbolique, le monde réel dans lequel se trouve le conducteur et la rame de métro. Si ce modèle interne est faux, le conducteur fera des bêtises, ce qui peut arriver, par exemple, à quelqu'un qui n'a jamais conduit une rame. Et celui qui apprend à conduire, est en train en fait de construire un modèle interne de plus en plus exact. Si on remplace le conducteur par une conduite automatique, on a, en réalité, remplacé le conducteur par un ordinateur qui, muni d'un logiciel, peut, à l'aide d'un certain nombre de dispositifs, agir sur les actionneurs. Le logiciel n'est pas forcement la replique exacte du modèle interne du conducteur. En effet, le logiciel est écrit à l'aide d'un langage formel et il est composé des systèmes mathématiques avec des propriétés bien définies. Nous avons ainsi un *modèle logique* de la réalité qui n'est pas le même avec le modèle interne du conducteur. Mais, malgré cette différence, il faut, devant une situation donnée, que les deux modèles réagissent de la même façon. Il faut donc savoir si le programme informatique se comporte chaque fois comme il faut qu'il se comporte. L'examen de la conformité du comportement des programmes avec les exigences de son utilisation constitue le *test des modèles*.

3

CALCUL PROPOSITIONNEL

Pour décrire un environnement donné, que nous appellerons par la suite *univers du discours* (noté $\mathcal{U}$), la logique utilise des phrases que nous appellerons *propositions logiques* ou encore *formules*. Le but du calcul logique est de donner un fondement à ces propositions c'est-à-dire examiner leur validité. Cet examen de la validité d'une formule se fera indépendamment du contexte dans lequel la formule a été élaborée et le résultat sera en rapport avec sa propriété d'être vraie ou fausse. Nous commençons l'étude de la logique par l'étude des propositions. Nous allons d'abord définir un langage qui permettra la construction des propositions, c-à-d. un alphabet et des mécanismes qui permettent de créer des propositions. Viendra ensuite l'étude sémantique et syntaxique des propositions créées, c'est-à-dire l'étude du sens et de la preuve des propositions.

3.1 Éléments du langage

Les propositions seront représentées par des symboles qui auront une valeur de vérité : *vraie, fausse*. Pour leur étude logique nous allons définir un *langage formel* $\mathcal{L}_0$ à l'aide des éléments suivants :

– Un ensemble V_p, au plus dénombrable, des *propositions* qui seront notées par $p, q, \ldots$. Notons que l'« appellation contrôlée » des propositions est *variables propositionnelles* terme que

nous n'utiliserons pas, de peur d'introduire une confusion en ce qui concerne le sens de la variable. On pourra par contre utiliser le nom – moins usité – de *propositions atomiques*.
- Un ensemble Ξ, au plus dénombrable, des *constantes*.
- Un ensemble L des *connecteurs* qui sont les suivants :
  - *Connecteur logique* unaire : la négation $\neg$
  - *Connecteurs propositionnels* binaires :
    - Disjonction : $\vee$
    - Conjonction : $\wedge$
    - Implication : $\rightarrow$
    - Équivalence (ou double implication) : $\leftrightarrow$
- Les séparateurs : parenthèses gauche "(" et droite ")", crochets gauche "[" et droit "]".

Les séparateurs ne font pas partie, à proprement parler, du langage. Leur présence permet de faciliter la lecture des propositions.

Les éléments du langage déterminent un *alphabet*

$$\Sigma_0 = \{V_p, \Xi, L\}$$

La brique élémentaire du calcul propositionnel est l'*atome*. Un proposition atomique est un atome. Une constante aussi. Plus généralement

DÉFINITION 3.1.1 *Un* atome *est une proposition dont la structure interne ne nous préoccupe pas.*

Par abus de notation, les atomes seront notés par la suite avec les ettres $p, q, r, \ldots$, c'est-à-dire de la même manière que les propositions bien qu'ils puissent être aussi des constantes. Implicitement on accepte donc qu'une constate puisse être vue comme une proposition, ce qui est d'ailleurs la réalité. Si nous maintenons la distinction entre constates et propositions, que les puristes pourraient nous reprocher, c'est uniquement pour des raisons de compatibilité avec le contenu du chapitre suivant.

À partir des atomes on peut construire des *formules bien formées* (fbf) dont la définition est la suivante :

DÉFINITION 3.1.2 *Une* formule bien formée *est*
- *soit un atome*
- *soit une proposition obtenue à partir des fbf A et B, selon les constructions suivantes :*
  - $\neg A$
  - $A \vee B$, $A \wedge B$
  - $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$

Selon cette définition, les propositions atomiques sont des fbf. Les formules bien formées seront notées par les lettres $A, B, C, \ldots$.

Si on note par F_0 le plus petit ensemble de fbf que nous pouvons construire selon la définition 3.1.2, alors la paire

$$\mathcal{L}_0 = \{\Sigma_0, F_0\}$$

est le *langage d'ordre zéro* ou le *langage du calcul propositionnel*. Par construction F_0 est est un ensemble dénombrable, défini récursivement.

Les principales propriétés des connecteurs sont données ci-après :

(1) Double négation ou involution

$$p \leftrightarrow \neg\neg p$$

(2) Loi de de Morgan

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

(3) Définition de l'implication

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

(4) Introduction de l'implication

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

(5) Distributivité de l'implication

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

(6) Contradiction

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$$

Étant donnée une proposition, nous pouvons en construire trois autres qui dérivent de celle-ci comme suit :

DÉFINITION 3.1.3 *Considérons la proposition $P_1 : p \rightarrow q$.*
La proposition $P_2 : \neg q \rightarrow \neg p$ est la proposition contrapositive *de P_1.*
La proposition $P_3 : q \rightarrow p$ est la proposition inverse *(ou* réciproque*) de P_1.*
La proposition $P_4 : \neg p \rightarrow \neg q$ est la négation *de P_1.*

ASCÈSE 3.1 *Soient les deux propositions :*

p_1 *Aujourd'hui on est le 13 du mois.*

p_2 *Demain on sera le 14 du mois.*

Exprimer en logique des propositions et en français les quatre propositions : directe, contrapositive, inverse et négation.

3.2 Proposition, énoncé et vérité

L'objectif de la logique est de déterminer la valeur de vérité d'une fbf – aussi complexe soit-elle – en se fondant sur la valeur de vérité de ses atomes et sur les tables de vérité des connecteurs logiques.

Le premier problème que l'on rencontre est dû au fait que la langue naturelle (ici le français) peut exprimer à la fois une proposition et sa vérité. Ce fait a des conséquences fâcheuses, en engendrant des paradoxes, comme par exemple le paradoxe du menteur : la proposition "je mens" vaut pour elle-même.

L'archétype des paradoxes est le paradoxe des classes établi par Russell : Soit $\mathcal{G}$ la classe des classes Y qui ne s'appartiennent pas : $\mathcal{G} = \{Y : Y \notin Y\}$ ce qui en langage logique s'écrit

$$(\forall Y)\,(Y \in \mathcal{G} \leftrightarrow Y \notin Y)$$

Supposons que $\mathcal{G}$ est une classe comme les autres. On peut alors la substituer à la variable (classe) Y et la formule précédente s'écrit : $(\mathcal{G} \in \mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{G} \notin \mathcal{G})$ ce qui est absurde.

On s'en sort (pas très bien) en considérant que les valeurs de vérité Vrai et Faux font partie du méta-langage et non pas du langage logique.

Il faut aussi examiner la nature d'une proposition en logique, qui n'est pas la même chose qu'en langue courante. En effet, en logique une proposition est un énoncé dont on ne tient pas compte ni de la personne qui l'exprime, ni du temps, ni de toute autre chose, à l'exception de l'information sur l'état des choses. Ainsi de la proposition "j'affirme que la fenêtre est fermée aujourd'hui"on ne retient que "la fenêtre est fermée".

Il faut faire attention à ne pas confondre proposition et énoncé. En effet une même proposition peut être exprimée par plusieurs énoncés différents mais synonymes.

Toute proposition peut être :

– démontrée syntaxiquement en termes de correction grammaticale ;
– interprétée sémantiquement en termes des valeurs de vérité.

Donc une proposition est un énoncé déclaratif grammaticalement correct susceptible d'être Vrai ou Faux.

La notion de la vérité n'est pas non plus une notion logique. En effet la vieille idée d'Aristote selon laquelle une proposition est vraie si elle correspond (elle est l'image) d'un fait n'est pas admise de nos jours car (d'après Frege) nous ne pouvons pas mettre en correspondance deux objets de nature différente (proposition – fait). Donc la vérité est logiquement indéfinissable (démarche analogue à la théorie de l'information, où le concept de l'information est mathématiquement indéfinnissable). Selon B. Russell "les propositions sont vraies ou fausses comme les roses sont roses ou rouges".

3.3 Interprétation sémantique – Modèles

La première tâche du calcul propositionnel est de donner un sens aux fbf, c'est-à-dire d'établir une correspondance entre les fbf et les faits de l'univers du discours. Ces faits sont connus par celui qui fournit la fbf. En effet, il faut admettre qu'en logique une fbf ne signifie, par elle-même, rien. Elle a un sens – si elle en a un – en fonction de l'*interprétation* faite par celui qui émet cette fbf.

Nous devons donc, pour évaluer le sens d'une fbf, établir seulement la valeur de vérité de cette fbf étant donnée l'interprétation adéquate. Pour ce faire, nous adoptons l'hypothèse fondamentale suivante :

Tout atome peut prendre deux valeurs : vrai – 1 et faux – 0 et la valeur de vérité d'une fbf est complètement déterminée par la valeur de chacun de ses atomes.

Concrètement à chaque atome d'une fbf on associe une valeur de vérité, selon l'interprétation que l'on donne à cet atome, et à chaque connecteur on associe une table de vérité fixe qui,

en fonction de la valeur de vérité de ses arguments, fournit la valeur de vérité de l'opération effectuée par le connecteur. Dans la table ci-après nous donnons les valeurs de vérité pour tous les connecteurs du langage.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

ASCÈSE 3.2 *Traduire les phrase suivantes*

(1) J'aime les pâtes soit à la tomate, soit à l'ail.

(2) Vous n'êtes pas sans savoir.

(3) Vous n'êtes pas sans ignorer.

(4) Si tu es sage, tu auras une glace.

L'utilisation des tables de vérité pour le calcul de la valeur d'une fbf est une méthode sémantique. On verra par la suite des méthodes syntaxiques.

EXEMPLE 3.3.1 *Vérifions que nous avons toujours* $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*

La dernière colonne de la table de vérité est toujours égale à 1, ce qui montre que la formule est toujours vérifiée.

ASCÈSE 3.3 *Vérifier si la formule*

$$p \to (q \vee (r \leftrightarrow (r \to \neg p)))$$

est une fbf et établir sa valeur.

ASCÈSE 3.4 *Établir une propsition $p(a,b,c)$ qui a la même valeur de vérité que la majorité de ses arguments.*

La valeur de vérité associée à un atome peut changer en fonction de la signification de cet atome. Par exemple si p est la proposition " la terre est ronde", alors la valeur de vérité de p est 1. Par contre si p est la proposition "la terre est un cube" sa valeur de vérité est 0. Associer une proposition abstraite p à une proposition concrète, comme nous venons de faire, c'est donner une *interprétation* à p. Plus généralement, une interprétation d'une fbf est le résultat d'une spécification de la signification, c-à-d. d'une interprétation, de chaque atome de la fbf. Formellement

DÉFINITION 3.3.1 *Considérons un ensemble d'atomes propositionnels noté Δ. Ainsi Δ forme une* base de données (BdD). *On appelle* valuation *de l'ensemble des éléments de la BdD Δ, une fonction $\varphi : \Delta \to \{0,1\}$*
Si A est une fbf, on note par Δ_A l'ensemble d'atomes propositionnels de A et si $card\,\Delta_A = n$, alors une valuation de A, qui sera notée $\varphi(\Delta_A)$ est un élément de $\{0,1\}^n$.

La notion de la valuation permet de définir celle de l'interprétation :

DÉFINITION 3.3.2 *Considérons une fbf A et soit Δ_A la BdD de ses atomes propositionnels. Si à chaque atome propositionnel on associe une interprétation, alors nous obtenons une valuation de Δ_A, c'est-à-dire une application $\varphi : \Delta_A \to \{0,1\}^n$. Cette valuation peut être vue comme une interprétation $\mathcal{I}$ de la fbf A. La valeur de l'interprétation, qui sera notée $\varphi_{\mathcal{I}}(A, \Delta_A)$ ou, encore, plus brièvement, $\varphi_{\mathcal{I}}(A)$ est la valeur de la fbf A si on lui applique la valuation φ et elle est un élément de $\{0,1\}$.*

EXEMPLE 3.3.2 *Considérons la fbf $A = p \vee q$. Alors $\Delta_A = \{p,q\}$ et soit une valuation (interprétation) φ de Δ_A telle que $\varphi(p) = 1$ et $\varphi(q) = 0$. Alors la valeur de cette interprétation sur A est $\varphi_I(A) = 1$.*

Si Δ contient n atomes propositionnels, alors on a au plus 2^n interprétations possibles de A. (Attention, elles ne sont pas toutes différents ! Vérifier avec l'exemple précédent). Si la valuation d'une interprétation particulière $\varphi_{\mathcal{I}}$ a la valeur 1, on dit que la valuation *satisfait* A et l'on note $\varphi_{\mathcal{I}}(A) = 1$. Il est évident que toute valuation d'une fbf A n'est pas susceptible de satisfaire à A, c'est-à-dire de conférer à A la valeur de vérité « vrai ». Nous avons ainsi :

DÉFINITION 3.3.3 *Soit A une fbf et $\mathcal{I}$ une interprétation. On dit que A est* satisfiable *par $\mathcal{I}$ ou que A est une* conséquence sémantique *de I, et l'on note $\mathcal{I} \models A$, si l'une de situations suivantes est vérifiée :*

- *si $A \in V_p$, alors $\mathcal{I} \models A$ ssi $\varphi_{\mathcal{I}}(A) = 1$*
- *si A est de la forme $(\neg B)$, alors $\mathcal{I} \models A$ ssi $\mathcal{I} \not\models B$([1])*
- *si A est de la forme $(B \wedge C)$, alors $\mathcal{I} \models A$ ssi $\mathcal{I} \models B$ et $\mathcal{I} \models C$*
- *si A est de la forme $(B \vee C)$, alors $\mathcal{I} \models A$ ssi $\mathcal{I} \models B$ ou $\mathcal{I} \models C$*

1. $\not\models$ signifie non satisfiable et il est un symbole extra-logique.

– *si A est de la forme $(B \to C)$, alors $\mathcal{I} \models A$ ssi soit $(\mathcal{I} \not\models B)$, soit $(\mathcal{I} \models C)$*
– *si A est de la forme $(B \leftrightarrow C)$, alors $\mathcal{I} \models A$ ssi soit $(\mathcal{I} \not\models B)$ et $(\mathcal{I} \not\models C)$, soit $(\mathcal{I} \models B)$ et $(\mathcal{I} \models C)$*

Il est à noter que dans une table de vérité, les colonnes représentent des fbf et les lignes des interprétations.

ASCÈSE 3.5 *Considérons les fbf suivantes :*

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge (\neg r \vee q)$

(3) $p \to q$

(4) $q \to p$

(5) $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$

et l'interprétation I suivante :

$$\phi_I(p) = 1,\ \phi_I(q) = 0,\ \phi_I(r) = 1$$

Donner la valeur de vérité des formules précédentes selon l'interprétation I.
Existe-t-il une interprétation qui rende toutes les formules vraies ?

Nous introduisons maintenant la notion du modèle pour une fbf.

DÉFINITION 3.3.4 *Soit A une fbf et $\mathcal{I}$ une interprétation. Si $\mathcal{I}$ rend A satisfiable, c'est-à-dire si $\mathcal{I} \models A$, alors $\mathcal{I}$ est un* modèle *pour A que l'on note par $M(A)$. On dit aussi que A est vraie dans $\mathcal{I}$.*
On note par $\mathcal{M}$ un ensemble de modèles pour A. Alors $\forall \mathcal{I} \in \mathcal{M}$ on a $\mathcal{I} \models A$ ce qui permet de noter $\mathcal{M} \models A$.

De cette définition on peut en conclure que si $\mathcal{I}$ est un modèle pour A, alors dans la table de vérité pour A, la ligne qui correspond à la valuation $\varphi_{\mathcal{I}}$ aura la valeur 1 à la colonne correspondante à A.

La notion du modèle donnée avec la définition précédente pour une fbf, peut être étendue à un ensemble des fbf F. On dit que l'interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle pour F si $\mathcal{I}$ est un modèle pour chaque fbf de F.

ASCÈSE 3.6 *Considérons une situation selon laquelle une alarme d'une maison se déclenche, si elle n'est pas en panne, quand il y a un tremblement de terre ou un cambriolage ou les deux à la fois.*

(1) Exprimer le déclenchement de l'alarme à l'aide de la logique propositionnelle.

(2) Trouver, s'il en existe, un modèle pour la formule établie précédemment.

(3) Pour chacune des situations suivantes, trouver, s'il en existe, en modèle :

(a) Tremblement de terre.

(b) Cambriolage $\longrightarrow \neg$Cambriolage

(c) (Cambriolage $\to \neg$Cambriolage) $\wedge$ Cambriolage

Nous introduisons maintenant quatre notions qui découlent de l'interprétation.

DÉFINITION 3.3.5 *Une fbf A qui est vraie pour toute interprétation est appelée* tautologie *(ou* formule valide*) et sera notée par $\models A$.*
Une fbf A pour laquelle il y a au moins une interprétation I qui la satisfait (c'est-à-dire que I est un modèle pour A) est appelée satisfiable *ou* (sémantiquement) consistante.
Une fbf A pour laquelle il existe une interprétation I telle que $\mathcal{I} \not\models A$ est appelée falsifiable.
Une fbf qui est fausse dans toute interprétation est appelée insatisfiable *ou* sémantiquement inconsistante*([2]).*

Les algorithmes qui à partir d'un ensemble des fbf engendrent des tautologies s'appellent *systèmes de preuve* ou *prouveurs*. Un prouveur est *cohérent* s'il engendre seulement des tautologies. Il est *complet* s'il engendre toutes les tautologies.

Pour un ensemble de fbf, nous avons la définition suivante :

DÉFINITION 3.3.6 *Un ensemble des fbf est* mutuellement exclusif *si et seulement si chaque interprétation satisfait au plus à une fbf.*
Un ensemble des fbf est exhaustif *si et seulement si chaque interprétation satisfait au moins à une fbf.*

ASCÈSE 3.7 *(1) Montrer que l'ensemble de fbf $\mathcal{F} = \{p \wedge q,\ q \vee r\}$ est satisfiable.*

(2) Montrer que l'ensemble de fbf $\mathcal{F} = \{p \wedge q,\ q \wedge r,\ \neg r\}$ est insatisfiable.

Dans le cas où A est une tautologie, dans la table de vérité de A, la colonne qui correspond à A contient seulement de 1.

Remarquons que si A est une tautologie, alors $\neg A$ est sémantiquement inconsistante et vice-versa.

ASCÈSE 3.8 *Pour les fbf suivantes préciser leur nature (tautologie, satisfiable ou insatisfiable).*

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(2) $q \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow p$

(3) $\neg p \rightarrow (p \vee q)$

(4) $p \wedge \neg(p \vee q)$

Deux fbf sont équivalentes si pour toute interprétation elles prennent la même valeur de vérité. La tautologie permet de formaliser la relation d'équivalence entre deux fbf :

DÉFINITION 3.3.7 *Deux fbf A et B sont* équivalentes*, et l'on note par $A \equiv B$, si et seulement si la fbf $A \leftrightarrow B$ est une tautologie.*

La relation $A \equiv B$ entre deux fbf est une relation d'équivalence en ce sens que : $A \equiv B \rightarrow B \equiv A$ et $A \equiv B \wedge B \equiv C \rightarrow A \equiv C$.

ASCÈSE 3.9 *Soit une fbf P et soit P' la proposition contrapositive de P. Montrer que P' est équivalente à P.*

On trouve dans la littérature une liste impressionnante des tautologies.Voici un extrait des tautologies célèbres :

2. Certains auteurs préfèrent le terme *antilogie* ou, encore, *contradiction* pour ce type de fbf.

(1) Loi du syllogisme

$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$$

(2)

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

(3) Introduction de *ou*

$$p \to (p \vee q) \ , \ q \to (p \vee q)$$

(4)

$$(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$$

(5) Élimination de *et*

$$(p \wedge q) \to p \ , \ (p \wedge q) \to q$$

(6)

$$(r \to p) \to ((r \to q) \to (r \to (p \wedge q)))$$

(7) Loi de l'importation

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$$

(8) Loi de l'exportation

$$((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$$

(9) Loi de Duns Scotus

$$(p \wedge \neg p) \to q$$

(10)

$$p \to (p \wedge \neg p) \to \neg p$$

(11) Loi du tiers exclu (tertium non datur)

$$p \vee \neg p$$

(12) Introduction de l'absurde $\perp$

$$(p \wedge \neg p) \to \perp$$

(13) Réduction à l'absurde

$$(\neg p \to \perp) \to p$$

(14)

$$(p \to q) \to ((p \to \neg b) \to \neg p)$$

L'exemple classique de fbf insatisfiable est le suivant :

$$p \leftrightarrow \neg p$$

ASCÈSE 3.10 *Vérifier que*

$$\neg(q \to p) \equiv q \wedge \neg p$$

Nous donnons dans la suite une liste numérotée avec des formules équivalentes. Toutes les formules du même numéro sont équivalentes.

(1) $p \to q$, $\neg p \vee q$, $\neg q \to \neg p$, $p \wedge q \leftrightarrow p$, $p \wedge q \leftrightarrow q$

(2) $\neg(p \to q)$, $p \wedge \neg q$

(3) $p \leftrightarrow q$, $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$, $(p \to q) \wedge (q \to p)$, $\neg p \leftrightarrow \neg q$, $(p \vee q) \to (p \vee q)$

(4) $\neg(p \leftrightarrow q)$, $p \leftrightarrow \neg q$, $\neg p \leftrightarrow q$

(5) p , $\neg\neg p$, $p \wedge p$, $p \vee p$, $p \vee (p \wedge q)$, $p \wedge (p \vee q)$, $\neg p \to p$, $(p \to q) \to p$, $(q \to p) \wedge (\neg q \to p)$

(6) $\neg p$, $p \to \neg p$, $(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$

(7) $p \wedge q$, $q \wedge p$, $p \wedge (\neg p \vee q)$, $\neg(p \wedge \neg q)$

(8) $p \vee q$, $q \vee p$, $p \vee (\neg p \wedge q)$, $\neg a \to q$, $(p \to q) \to q$

(9) $p \to (q \to r)$, $(p \wedge q) \to r$, $q \to (p \to r)$, $(p \to q) \to (p \to r)$

(10) $p \to (q \wedge r)$, $(p \to q) \wedge (p \to r)$

(11) $p \to (q \vee r)$, $(p \to q) \vee (p \to r)$

(12) $(p \wedge q) \to r$, $(p \to r) \vee (q \to r)$

(13) $(p \vee q) \to r$, $(p \to r) \wedge (q \to r)$

(14) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$, $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

Les lignes numérotées 10 et 11 montrent qu'il y a distributivité à gauche de l'implication par rapport à la conjonction et la disjonction et les deux lignes suivantes montrent que cette distributivité disparaît lorsque l'implication passe à droite.

On termine ce paragraphe par la notion de conséquence valide.

DÉFINITION 3.3.8 *Soit la fbf B dont les atomes font partie des atomes des fbf $A_1, A_2, \ldots, A_n$. B est une* conséquence valide *des $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que l'on note par $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$, si B prend la valeur 1 quand tous les A_i, qui contiennent des atomes de B, sont simultanément à 1.*

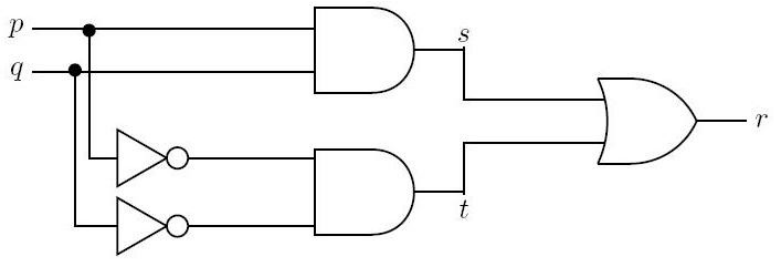
On dit aussi que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ impliquent logiquement B. De manière plus simple on peut dire que $A \models B$ ssi tout modèle de A est aussi modèle de B. Si, de plus, on a que tout modèle de A est aussi un modèle de B et tout modèle de B est un modèle de A, alors A et B sont équivalents : $A \equiv B$.

Dans la suite il faut faire attention au fait que le même symbole, à savoir $\models$, est utilisé pour indiquer deux relations différentes :

- la relation de satisfiabilité qui relie une interprétation à une fbf ;
- la relation de conséquence valide qui relie deux fbf entre elles.

ASCÈSE 3.11 *Considérons le circuit suivant*
Montrer que ce circuit vérifie la proposition

$$[(p \vee q) \to \neg(\neg p \vee \neg q)] \to r$$



Nous avons le

THÉORÈME 3.3.1 *$A \models B$ est équivalent à $\models (A \to B)$.*

ASCÈSE 3.12 *Traduire et évaluer la phrase suivante :*

Tu ne dis pas où tu te trouves et si Toto ne le dit pas, alors Koko le dira si et seulement si on lui promet de lui acheter une glace.

L'ascèse suivant introduit l'analyse logique d'un programme.

ASCÈSE 3.13 *Soient les deux programmes suivants :*

Programme 1

```
Si (x > 0) et (y > 0) alors
     afficher ('Produit x*y positif')
Finsi
```

Programme 2

```
Si (x > 0) alors
    si (y > 0) alors
        afficher ('Produit x*y positif')
    Finsi
Finsi
```

Montrer que ces deux programmes sont sémantiquement équivalents.

3.4 Modèles et connaissances

Nous pouvons utiliser les modèles $\mathcal{M}(A)$ d'une fbf A pour obtenir des connaissances sur l'univers du discours. Nous avons les résultats suivants :

- $\mathcal{M}(A \wedge B) = \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{M}(B)$
- $\mathcal{M}(A \vee B) = \mathcal{M}(A) \cup \mathcal{M}(B)$
- $\mathcal{M}(\neg A) = \mathcal{M}(A)^C$

Nous avons aussi que

- La fbf A est satisfiable ssi $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$.
- Soient deux fbf A et B. Nous avons $A \to B$ ssi $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}(B)$.
- A est équivalente à B ssi $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(B)$
- Les fbf $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement exclusives ssi $\mathcal{M}(A_i) \cap \mathcal{M}(A_j) = \emptyset \; ; \; \forall i \neq j$.

De plus nous pouvons utiliser les modèles pour examiner la sémantique d'une fbf. Supposons par exemple que nous avons une fbf A et que nous connaissons les modèles $\mathcal{M}(A)$ pour A. Si notre connaissance est enrichie d'une nouvelle fbf B, alors nous connaissons les modèles $\mathcal{M}(A \wedge B) = \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{M}(B)$ qui est une connaissance plus précise que la précédente. Nous arrivons à un état complet de connaissance si toutes les interprétations sont fausses, sauf une qui constitue le seul modèle correspondant aux fbf utilisées.

ASCÈSE 3.14 *Considérons la situation de l'ascèse 3.6. Notre état de connaissances sont les huit interprétations possibles. Si on nous donne la fbf*

$$A \ : \ (\textit{Tremblement de terre} \ \wedge \ \textit{Cambriolage}) \ \rightarrow \ \textit{Alarme}$$

que devient notre état de connaissances ?

Supposons qu'une nouvelle fbf

$$B \ : \ \textit{Tremblement de terre} \ \rightarrow \ \textit{Cambriolage}$$

De quelle manière évolue notre état de connaissances ?

Nous avons le

THÉORÈME 3.4.1 *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux ensembles de modèles tels que $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$. Si $\mathcal{M} \models A$, alors $\mathcal{M}' \models A$.*

ASCÈSE 3.15 *Appliquer le théorème précédent à l'ensemble des modèles :*

	p	q
v_1	0	0
v_2	0	1
v_3	1	0
v_4	1	1

et vérifier qu'en restreignant l'ensemble de modèles on devient capable d'inférer des propositions plus fortes (plus restrictives).

3.5 Évaluation syntaxique – Démonstration

L'évaluation syntaxique est un procédé mécanique qui permet de déduire le bien fondé d'une formule indépendamment du sens de ses composantes. Pour ce faire on s'appuie sur un ensemble d'axiomes et des règles d'inférence. Considérée de cette façon, l'évaluation syntaxique est une théorie de la démonstration. La première notion de la théorie de démonstration est le théorème dont voici sa définition.

DÉFINITION 3.5.1 *Une fbf A est un* théorème, *et l'on note $\vdash A$, si A est un axiome ou si A est obtenue par application des règles d'inférence sur d'autres théorèmeset/ou axiomes.*

Les axiomes de la logique sont les principes fondamentaux de la logique, c'est-à-dire des propositions du langage qui sont vraies en vertu uniquement de leur syntaxe. Le calcul propositionnel possède trois axiomes :

A1.- Introduction de l'implication

$$A \to (B \to A)$$

A2.- Distributivité de l'implication

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

A3.- Négation

$$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$$

où, encore

$$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$$

Remarquons que ces axiomes sont en fait des schémas d'axiomes, en ce sens qu'à chaque schéma ci-dessus correspond en fait une infinité d'axiomes. Par exemple pour le schéma A1, en remplaçant A par $A \to C$ et B par $B \to C$, on peut avoir l'axiome : $(A \to C) \to ((B \to C)\,(A \to C))$.

Les règles d'inférence sont les règles utilisées par le mécanisme de démonstration. Le calcul propositionnel, et en particulier Prolog, utilise la règle d'inférence suivante :

R1.- Modus ponens (règle du détachement)

$$\frac{\vdash A, \vdash A \to B}{\vdash B}\ {}_{3}$$

Pour faciliter les calculs en logique on peut aussi utiliser les règles suivantes :

R2.- Modus tollens (l'inverse de modus ponens) ou, encore, résolution unitaire

$$\frac{\vdash A \to B, \vdash \neg B}{\vdash \neg A}$$

R3.- Élimination de « ET »

$$\frac{\vdash A \wedge B}{\vdash A, \vdash B}$$

R4.- Introduction de « ET »

$$\frac{\vdash A, \vdash B}{\vdash A \wedge B}$$

R5.- Introduction de « OU »

$$\frac{\vdash B}{\vdash A \vee B \vee C \cdots}$$

R6.- Loi de l'involution (Double négation)

$$\frac{\vdash \neg\neg A}{\vdash A}$$

3. La notation $\frac{\vdash A}{\vdash B}$ est utilisée à la place de $(\vdash A) \vdash (\vdash B)$ pour indiquer qu'il s'agit d'une règle d'inférence et non pas d'une proposition.

R7.- Double résolution

$$\frac{\vdash A \vee \vdash B,\ \vdash \neg B \vee C}{\vdash A \vee C} \text{ ou, de façon équivalente } \frac{\vdash \neg A \to B,\ \vdash B \to C}{\vdash \neg A \to C}$$

R8.- Lois de de Morgan

$$\frac{\vdash \neg(A \vee B)}{\vdash (\neg A \wedge \neg B)} \qquad \frac{\vdash \neg A \wedge B)}{\vdash (\neg A \vee \neg B)}$$

R9.- Lois de simplification

$$\frac{\vdash A \vee (A \wedge B)}{\vdash A} \qquad \frac{\vdash A \wedge (A \vee B)}{\vdash A} \qquad \frac{\vdash A \vee (\neg A \wedge B)}{\vdash A \vee B}$$

Nous pouvons déterminer un *système d'inférence* ou *système de déduction* comme étant constitué d'un ensemble d'axiomes et d'un ensemble de règles d'inférence, c'est-à-dire par le couple $\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \mathcal{R})$.

Si on se limite aux trois axiomes (A1)-(A3) et la règle (R1) du modus ponens, nous avons le système d'inférence de Hilbert, noté $\mathcal{H}$. Dans ce système, on peut établir le théorème :

THÉORÈME 3.5.1 *On a*

$$\vdash A \to A$$

Dans ce système nous avons aussi la règle (controversée par les intuitionnistes dans le cas général) de *reductio ad absurdum* qui s'enonce comme suit :

$$Si\ A \vdash \neg B \to \bot,\ alors\ A \vdash B$$

Cette règle est à la base du théorème de réfutation (cf. infra) qui est la pierre angulaire du mécanisme de démonstration utilisé par Prolog.

Une *théorie* est constituée par la donnée d'un système d'inférence et de tous les théorèmes qui peuvent être obtenus par le système d'inférence.

Nous sommes maintenant en mesure de définir la démonstration et la déduction.

DÉFINITION 3.5.2 *Soit un théorème A. Une* démonstration *de A est une suite finie* $(A_1, A_2, \ldots, A_n, A)$ *où chaque* A_i *est soit un axiome, soit le résultat d'une règle d'inférence appliquée sur des éléments* A_j *précédemment obtenus (c'est-à-dire* $j < i$*).*

ASCÈSE 3.16 *Démontrer la fbf*

$$\vdash (A \to A)$$

DÉFINITION 3.5.3 *Une fbf A est une* déduction *de l'ensemble de fbf* $B_1, B_2, \ldots, B_n$*, que l'on note* $B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash A$*, s'il existe une suite finie* $(A_1, A_2, \ldots, A_n, A)$ *où chaque* A_i *est soit un axiome, soit un des* B_i *soit il est obtenu par application d'une règle d'inférence sur des éléments* A_j *précédemment obtenus.*
Les fbf B_i *sont appelées des* hypothèses.

3.6 Équivalence entre modèles et théorie de démonstration

Nous allons examiner la relation qu'il existe entre l'interprétation sémantique d'une fbf et sa démonstration syntaxique. Nous avons vu que pour établir la validité d'une formule l'interprétation sémantique utilise des éléments qui ne font pas nécessairement partie du langage de la logique. Par contre la démonstration syntaxique utilise de méthodes de la logique pour élaborer la démonstration d'une formule.

Le problème que nous avons ici est que les résultats de l'interprétation sémantique ne doivent pas être en contradiction avec les résultats de la démonstration syntaxique. Il faut donc que, pour une formule donnée, $\vdash f$ entraîne $\models f$ (adéquation de la logique) et aussi que $\models f$ entraîne $\vdash f$ (complétude de la logique). Plus formellement, nous avons :

DÉFINITION 3.6.1 *Une logique est* adéquate *si tout théorème $\vdash A$ est une formule valide $\models A$.*

Une logique est syntaxiquement consistante *s'il n'existe aucune formule du langage telle que $\vdash A$ et $\vdash \neg A$.*

Une logique est (faiblement) complète *si toute formule valide est un théorème, c'est-à-dire* $(\models A) \rightarrow (\vdash A)$.

L'équivalence cherchée est obtenue à l'aide des trois théorèmes suivants :

THÉORÈME 3.6.1 *Le calcul propositionnel est adéquat :* $(\vdash A) \rightarrow (\models A)$.

THÉORÈME 3.6.2 *Le calcul propositionnel est syntaxiquement consistant.*

THÉORÈME 3.6.3 *Le calcul propositionnel est (faiblement) complet :* $(\models A) \rightarrow (\vdash A)$.

Les théorèmes 3.6.1 et 3.6.3 illustrent le fait qu'en calcul propositionnel, toute tautologie est un théorème et vice-versa, ce qui exprime le théorème suivant :

THÉORÈME 3.6.4 *Si $\vdash p$, alors p est une tautologie et vice-versa.*

3.7 Quelques méta-théorèmes

Dans les paragraphes précédents nous avons introduit un certain nombre de concepts concernant les fbf considérées individuellement. Nous allons étendre ces notions à un ensemble E des fbf. Nous avons ainsi :

DÉFINITION 3.7.1 *Un ensemble E de fbf est* insatisfiable *ou* sémantiquement inconsistant *si et seulement s'il n'existe aucune interprétation $\mathcal{I}$ telle que chaque fbf A de E soit satisfiable par $\mathcal{I}$.*

Cette définition permet d'établir le théorème de la réfutation :

THÉORÈME 3.7.1 (Th. de la réfutation) *Une fbf A est* conséquence valide *d'un ensemble E de fbf, c'est-à-dire $E \models A$, si et seulement si $E \cup (\neg A)$ est insatisfiable.*([4])

4. Une autre forme équivalente (et utile) de ce théoreme est la suivante : Si $F \vee A$ est inconsistante, alors $F \vdash \neg A$

Si on note par $\perp$ la fbf qui est toujours fausse, on déduit qu'un ensemble de fbf est insatisfiable si et seulement s'il a comme conséquence la formule $\perp$. Il s'ensuit donc, que toute vérification de la validité d'un ensemble de fbf peut se réduire à la preuve de son inconsistance sémantique.

Cette remarque permet d'établir une autre méthode pour la vérification d'une fbf. Jusqu'ici la seule méthode que nous avons examiné était fondée sur les tables de vérité. La preuve par réfutation est une autre méthode qui a permis d'obtenir des algorithmes très éfficaces concernant la preuve des fbf.

Nous donnons ci-après quelques métathéorèmes([5]= supplémentaires du calcul propositionnel en commençant par la partie sémantique. Nous avons :

THÉORÈME 3.7.2 (Th. de la déduction) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ *ssi* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \models (A_n \to B)$.

THÉORÈME 3.7.3 (Th. de finitude) *Soit F un ensemble fini ou dénombrable de fbf et A une fbf. Si $F \models A$, alors il existe un ensemble fini $F' \subset F$ tel que $F' \models A$.*

THÉORÈME 3.7.4 (Th. de monotonie) *Soient F_1, F_2 des ensembles finis de fbf. Si $F \models A$, alors $\{F_1, F_2\} \models A$.*

Du point de vue syntaxique nous avons :

THÉORÈME 3.7.5 (Th. de la déduction) $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ *ssi* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \to B)$.

THÉORÈME 3.7.6 (Th. de transitivité) *Si $C \vdash A_1, \ldots, C \vdash A_n$ et si $(A_1, \ldots, A_n) \vdash B$, alors $C \vdash B$.*

THÉORÈME 3.7.7 (Th. d'échange) *Soit A une sous-formule de la fbf F. Si F est un théorème et si $A \leftrightarrow B$ est un théorème, alors la formule obtenue en remplaçant dans F une occurrence de A par B est un théorème.*

THÉORÈME 3.7.8 (Th. de substitution) *Soit S un théorème, x une proposition ayant au moins une occurrence dans S et A une fbf. Alors $S[x/A]$ est un théorème.*

THÉORÈME 3.7.9 (Th. de monotonie) *Soient F_1, F_2 deux fbf. Si $F \vdash A$,alors $F_1, F_2 \vdash A$.*

THÉORÈME 3.7.10 (Contraposition) $F \wedge A \vdash \neg B$ *ssi* $F \wedge B \vdash \neg A$

Nous donnons maintenant un méta-théorème qui part de la sémantique pour aboutir à la syntaxe.

THÉORÈME 3.7.11 (Règle T) *Si $F \models A_1, \cdots, F \models A_n$ et $A_1, \ldots, A_n \models A$, alors $F \vdash A$.*

ASCÈSE 3.17 *Inférer la proposition*

$$(p \to q, q \to r) \vdash p \to r$$

- *sans utiliser le th. de déduction ;*
- *en utilisant le th. de déduction.*

5. Les métathéorèmes sont des théorèmes sur les théorèmes

Remplacer les hypothèses d'une conséquence sémantique par d'autres plus simples peut parfois être utile. Le théorème d'interpolation de Craig fournit une réponse à cette préoccupation.

THÉORÈME 3.7.12 (Th. d'interpolation) *Soient A et B deux fbf telles que $\models A \to B$. Alors il existe une fbf C composée uniquement par des propositions qui sont communes à A et à B et telle que $\models A \to C$ et $\models C \to B$.*

Le théorème suivant dû à E. Beth, affirme qu'en logique propositionnelle une définition implicite peut toujours avoir une forme explicite. C'est une technique applicable à l'intelligence artificielle et qui permet d'obtenir des informations explicites à partir des informations exprimées implicitement.

THÉORÈME 3.7.13 (Th. de définissabilité) *Soit A une fbf ne contenant pas q et r. Si la fbf*

$$(A(p,q) \wedge A(p,r)) \to (q \leftrightarrow r)$$

est une tautologie, alors il existe une fbf B ne contenant pas p, q et r et telle que $A \to (p \leftrightarrow B)$ soit une tautologie.

Nous allons finir cete section avec le théorème de compacité qui assure la possibilité, étant donné un ensemble infini d'hypothèses (c-à-d. des fbf) qui induit une fbf, d'en extraire un sous-ensemble fini qui induit la même fbf.

DÉFINITION 3.7.2 *Un ensemble infini de fbf est* finiment consistant *si tous ses sous-ensembles finis sont consistants.*

Un ensemble finiment consistant est maximal *s'il n'existe pas un sur-ensemble qui est finiment consistant.*

Concrètement si F est un ensemble infini de fbf et si pout tout $A \subset F$, avec A fini, il existe un modèle $M(A)$ de A, alors F est *finiment consistant*.

De plus étant donnée une proposition p, si on a $p \notin F$, alors $\neg p \in F$.

Nous avons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 3.7.14 *Tout ensemble finiment consistant maximal est consistant et admet un modèle unique.*

THÉORÈME 3.7.15 (Th. de la compacité) *Tout ensemble finiment consistant est consistant.*

3.8 Arborescences sémantiques

Afin de représenter une fbf nous pouvons utiliser une arborescence([6]) qui est une structure particulière de la théorie des graphes.

Les définitions de la théorie des graphes qui seront utilisées ici sont les suivantes (cf. *C. Berge : Théorie des graphes et ses applications, Dunod, 1959*) :

Un *graphe* est un couple $G = (X, \Gamma)$, où X est un ensemble d'éléments, appelés *sommets* du graphe, et Γ est une application de X dans X. Une paire (x, y) d'éléments de X avec $y \in \Gamma(x)$

6. Notons que l'habitude en Intelligence Artificielle est d'appeler arbre l'arborescence, à cause d'une fâcheuse simplification de la terminologie de la théorie des graphes.

est appelée *arc* du graphe et sera noté par u et l'ensemble des arcs d'un graphe sera noté U. D'où une autre définition d'un graphe comme étant le couple $G = (X, U)$.

Une suite $c = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ d'arcs tels que l'extrémité terminale de chaque arc coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc suivant, est appelé *chemin*. Si dans un chemin le sommet initial x_1 coïncide ave le sommet terminal x_n, alors nous avons un *circuit*.

Un graphe fini $G = (X, U)$ est une *arborescence de racine* $x_0 \in X$ si :

1^0 $\forall x \in X$, $x \neq x_0$ est l'extrémité terminale d'un seul arc ;

2^0 x_0 n'est l'extrémité terminale d'aucun arc ;

3^0 G ne contient pas de circuits.

Les sommets qui ne sont pas l'extrémité initiale d'un arc quelconque s'appellent *sommets terminaux* ou *feuilles*.

On introduit d'abord la définition suivante :

DÉFINITION 3.8.1 *Étant donné un atome p, un* littéral *relatif à cet atome est soit p, soit $\neg p$.*

L'arborescence sémantique d'une fbf F composée des atomes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ est construite de la façon suivante :

- Pour chaque atome $p \in F$, les deux éléments de $[p]$ sont deux sommets distincts de l'arborescence.
- Deux arcs dont l'extrémité terminale du premier est le sommet p et et du second le sommet $\neg p$, ont leur extrémité initiale commune.
- Aucun chemin ne comporte plus d'une occurrence de chaque atome.

L'arborescence sémantique est complète si chaque chemin contient une et une seule fois chaque atome. Elle est partielle si chaque chemin contient au plus une fois chaque atome.

Il est clair que l'arborescence sémantique complète de n atomes contient 2^n sommets terminaux. Les tables de vérité conduisent à l'examen de ces 2^n sommets terminaux et par conséquent leur utilisation est complètement inefficace dès que n dépasse la valeur de 5.

3.9 Formes clausales

Afin de construire des méthodes plus efficaces pour la preuve de la validité d'une fbf, nous allons utiliser la notion de la clause.

DÉFINITION 3.9.1 *Une* clause *C est une disjonction de littéraux $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$.*
La clause vide sera notée par $\perp$. Il s'agit d'une fbf toujours fausse.

DÉFINITION 3.9.2 *Une conjonction de clauses $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ est une* forme conjonctive normale (fcn).
Une fcn est parfois notée sous forme ensembliste $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$.

On peut penser à transformer l'examen de la satisfiabilité d'une fbf en un examen de la validité d'une fcn, en espérant que ce dernier soit plus facile à réaliser. Néanmoins il faudrait qu'on puisse passer de la fbf à la fcn. Le théorème suivant introduit cette démarche.

THÉORÈME 3.9.1 (Théorème de normalisation) *Toute fbf peut se transformer à une fcn qui est logiquement équivalente.*

L'algorithme de la transformation d'une fbf en une fcn est le suivant :

(1) Élimination du connecteur $\leftrightarrow$: $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

(2) Élimination du connecteur $\rightarrow$: $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$

(3) Transfert de la négation au niveau le plus intérieur (c-à-d. devant les atomes) par utilisation des formules :
- des lois de de Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ en tant que règles de réécriture ;
- de la loi de l'involution : $\neg\neg A \equiv A$ qui permet la suppression des doubles négations.

(4) Application de la distributivité
- de $\vee$ par rapport à $\wedge$: $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (B \vee C)$
- de $\wedge$ par rapport à $\vee$: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (B \wedge C)$

en tant que règles de réécriture.

La formule obtenue au terme de cet algorithme est une fcn, équivalente à la formule initiale.
L'examen de la validité d'une fcn est fondé sur les trois remarques suivantes :
- Une fcn vide est consistante.
- Une fcn contenant la clause absurde $\perp$ est inconsistante.
- On réduit une fcn contenant deux clauses opposées en $\perp$, i.e. $A \wedge \neg A = \perp$.

ASCÈSE 3.18 *Appliquer l'algorithme ci-dessus à la fbf*

$$p \longleftrightarrow (q \rightarrow r)$$

Un type particulier de clause et – opératoirement – très utilisé est la clause de Horn.

DÉFINITION 3.9.3 *Une* clause de Horn *est une clause qui a une des trois formes suivantes :*

Clauses de Horn strictes (règles)	$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$
Clauses de Horn négatives (questions)	$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow$
Clauses de Horn positives (faits)	$\rightarrow q$

Donc une clause de Horn est une clause qui a au plus un atome positif. En effet, la clause de Horn ci-dessus peut aussi s'écrire $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \vee q$.

Les clauses de Horn strictes sont équivalentes à $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \models q$. Les clauses de Horn négatives sont équivalentes à $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \models \perp$. Les clauses de Horn positives sont équivalentes à $\models q$.

Notons que la clause vide "$\rightarrow$" sans atome ni à gauche, ni à droite, est la seule clause inconsistante.

ASCÈSE 3.19 *Vérifier si les formules suivantes sont des clauses de Horn :*

(1) $(p \wedge q \wedge r \rightarrow p) \wedge (q \wedge s \rightarrow p) \wedge (p \wedge r \rightarrow r)$

(2) $(p \wedge q \wedge r \rightarrow \perp) \wedge (q \wedge s \rightarrow p) \wedge (\top \rightarrow r)$

(3) $(p \wedge q \wedge r \to \neg p) \wedge (q \wedge s \to p) \wedge (p \wedge r \to r)$

(4) $(p \wedge q \wedge r \to \bot) \wedge (\neg q \wedge s \to p) \wedge (\top \to r)$

Actuellement, un de problèmes majeurs de l'industrie du logiciel est la vérification, du point de vue des spécifications, du code écrit. Une voie de résolution est de transformer ce problème à un problème de satisfiabilité propositionnelle (PSAT) qui consiste à chercher un modèle pour une fbf donnée. Une procédure exhaustive pour résoudre le PSAT en utilisant des fcn est de tester systématiquement tous les éléments de la fcn. S'il y a n atomes différents dans la formule, alors le problème s'appelle n-SAT et il faut faire 2^n tests. Il y a de cas spéciaux : 2-SAT avec complexité polynômial et 3-SAT avec complexité NP-complète.

L'importance des fcn vient aussi du fait qu'elle peut être utilisée pour démontrer des théorèmes en logique propositionnelle. En effet pour prouver la fbf A, on peut la réduire en sa fcn. Si cette forme prend la valeur vraie, alors A est aussi vraie car la transformation en fcn préserve l'équivalence logique. En effet, supposons que la fcn de A est $A_1 \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. Si A est valide, alors chaque A_i l'est aussi. Supposons que A_i est une disjonction des littéraux $L_1 \vee \cdots \vee L_{m_i}$. On cherche à savoir s'il y a une interprétation qui rend faux tous les littéraux L_j. Une telle interprétation existe sauf s'il y a deux littéraux L_j et L_k différents et tels que $L_j = \neg L_k$. Dans ce cas $L_1 \vee \cdots \vee L_{m_i} = \top$.

Cette méthode d'évaluation de la valeur de vérité d'une fbf est une méthode syntaxique. Elle est plus facilement mécanisable que les tables de vérité, mais elle souffre du même inconvénient que ces dernières : temps de calcul exponentiel.

ASCÈSE 3.20 *Vérifier, en utilisant la reduction à la fcn si les fbf suivantes sont des théorèmes.*

(1) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

(2) $(p \vee q) \to (q \vee r)$

On termine cette section avec la notion du résolvant d'un ensemble de clauses. Soit un ensemble C des clauses mis, éventuellement, sous forme conjonctive normale. Considérons un littéral p (c'est-à-dire un atome ou sa négation) et notons par C_p l'ensemble de clauses de C qui contiennent p et par $C_{\neg p}$ les clauses qui contiennent sa négation. Nous avons la

DÉFINITION 3.9.4 *Le* résolvant de C par rapport à p *est la clause* $C_R(p) = C_p \cup C_{\neg p}$.

Le résolvant permet de savoir si une clause sous forme disjonctive A est conséquence d'un ensemble de clauses C. En effet, soit A est une clause de C, soit elle pourra être obtenue comme une clause d'un résolvant de C ou d'une application itérative du résolvant, en remplçant à chaque itération C par $C - \left(\bigcup C_R(p) \bigcup \left(C_p^- \cup C_{\neg p}^-\right)\right)$, où on a noté C_p^- l'ensemble de clauses de C_p privées du littéral p et $C_{\neg p}^-$ l'ensemble de clauses de $C_{\neg p}$ privées du littéral $\neg p$.

EXEMPLE 3.9.1 *Soit l'ensemble de clauses*

$$C = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg r$$

Nous allons montrer que $C \vdash p$.
On a $C_R(q) = p \vee (p \vee r)$ *et donc* $C = C_R(q) \wedge \neg r$. *Ensuite on a* $C_R(r) = p$ *et donc* $C = p \wedge p = p$.

Cette démarche s'appuie sur le théorème suivant :

THÉORÈME 3.9.2 (COHÉRENCE DU RÉSOLVANT) *Si C un ensemble de clauses et $C_R(p)$ son résolvant par rapport à p, on a*

$$C \models C_R(p)$$

.

On a aussi le théorème suivant qui fait la liaison entre syntaxe et sémantique pour le résolvant.

THÉORÈME 3.9.3 *Soit C un ensemble de clauses. Si $C \vdash C_R$, alors C_R est un résolvant de C, c-à-d. $C \models C_R$.*

ASCÈSE 3.21 *Prouver que $(a \wedge (a \rightarrow b) \wedge \neg b) \models \perp$.*

3.10 Algorithmes pour le calcul propositionnel

Le problème de la satisfiabilité d'une fbf A à partir des hypothèses $C_1, C_2, \ldots, C_n$ avec n fini, se décline de trois façons différentes :

- La fbf A est-elle une conséquence valide des fbf $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$? Cette proposition s'écrit $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \models A$.
- La fbf $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \rightarrow A$ est-elle une formule valide ? Cette proposition s'écrit $\models (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \rightarrow F)$.
- $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \wedge \neg A$ est-elle une fbf insatisfiable ?

L'équivalence entre les trois propositions ci-dessus découle du théorème 3.7.1 de réfutation.

Cette pluralité d'approches du problème a donné naissance à une multitude d'algorithmes concernant la preuve de la validité d'une fbf.

Dans la suite nous présenterons les algorithmes suivants :

- Algorithme de Quine (arborescences sémantiques).
- Algorithme de réduction (tableaux sémantiques).
- Algorithme de Davis et Putnam (arborescences sémantiques).
- Algorithme de résolution (règle de la réfutation).

Tous les algorithmes qui suivent utilisent la fbf :

$$(\omega) \qquad C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \rightarrow A$$

dont on cherche à prouver la validité.

3.10.1 Algorithme de Quine

Il est fondé sur les arborescences sémantiques mais il évite leur développement complet.

L'algorithme de Quine consiste en l'élaboration de l'arborescence sémantique étape par étape.

- À chaque sommet p ou $\neg p$ d'une branche de l'arborescence :
  - On procède à la substitution $\sigma = (p/1, \neg p/0)$.
  - On évalue la formule réduite $\omega' = \omega\sigma$.

  - Si ω' se réduit à une valeur de vérité (0 ou 1), arrêt de l'exploration de la branche. Sinon on poursuit l'exploration de la branche.
- Le processus s'arrête :
  - avec succés, lorsque on a obtenu un résultat sur une branche avec valeur de vérité à 1 et sur une autre branche avec valeur de vérité à 0
  - avec échec, lorsque on a parcouru toutes les branches.

ASCÈSE 3.22 *Appliquer l'algorithme de Quine à la fbf*

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

3.10.2 Algorithme de réduction

Cet algorithme utilise la technique de la preuve par l'absurde. Il consiste à supposer que la fbf à démontrer est fausse, c'est-à-dire que la fbf $(C_1, C_2, \ldots, C_n, \neg A)$ est insatisfiable, et à arriver, en appliquant l'algorithme, à une contradiction.

- On construit une table avec deux colonnes : 1 et 0.
- On met la fbf (ω) dans la colonne 0 (c-à-d. on suppose que (ω) est fausse).
- On décompose (ω) en sous-formules qu'on place soit à la colonne 1, soit à la colonne 0, selon les règles suivantes :
  - Si on a $p \to q$ dans la colonne 0, alors on place p dans la colonne 1 et q dans la colonne 0.
  - Si on a $p \wedge q$ dans la colonne 1, alors on place p et q dans la colonne 1.
  - Si on a $p \vee q$ dans la colonne 0, alors on place p et q dans la colonne 0.
- Si on arrive à avoir dans les deux colonnes, 0 et 1, la même formule, alors on est en présence d'une contradiction (la même formule est à la fois vraie et fausse !) et on peut s'arrêter car la fbf (ω) est vraie.

ASCÈSE 3.23 *Appliquer l'algorithme de la réduction à la fbf*

$$((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$$

3.10.3 Algorithme de Davis - Putnam

Soit C une fcn et p un atome. Alors C en tant qu'ensemble est partionné en trois sous-ensembles :

- C_p ensemble des clauses contenant p ;
- $C_{\neg p}$ ensemble des clauses contenant $\neg p$;
- $C_R = C - (C_p \cup C_{\neg p})$

D'autre part on note par

- C_p^- l'ensemble des clauses de C_p privées de p.
- $C_{\neg p}^-$ l'ensemble des clauses de $C_{\neg p}$ privées de $\neg p$.

L'algorithme est fondé sur les deux propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 3.10.1 *Si p est vraie, alors l'ensemble C équivaut à $C_{\neg p}^- \cup C_R$.*

PROPRIÉTÉ 3.10.2 *Si p est fausse, alors l'ensemble C équivaut à $C_p^- \cup C_R$.*

L'algorithme est le suivant :

(1) Si $C = \perp$, alors C est satisfiable.

(2) Si $C = \{\perp\}$, alors C est insatisfiable.

(3) Sinon

(a) Choisir une proposition $p \in C$

(b) Calculer $C_p, C_{\neg p}$ et C_R.

(c) Calculer C_p^- et $C_{\neg p}^-$.

(d) Si les deux ensembles $C_{\neg p}^- \cup C_R$ et $C_p^- \cup C_R$ sont insatisfiables, alors C est insatisfiable.

Nous pouvons nous apercevoir que cet algorithme à chaque étape :
– supprime de la fcn sous examen un atome ;
– décompose la fcn sous examen en deux fcn plus simples dans la mesure où il n'y figure plus l'atome supprimé.

ASCÈSE 3.24 *Examiner si l'implication suivante*

$$\{p \to q,\ q \to r\} \models (p \vee q) \to r$$

est valide.

3.10.4 Algorithme de résolution

Il s'agit d'un algorithme proposé par A. Robinson et fondé sur le théorème 3.7.1 de réfutation et sur le résolvant.

Considérons une fcn $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$, où chaque C_i clause. Dans la suite on notera une fcn sous forme ensembliste $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$, où la virgule ici est mise à la place du connecteur $\wedge$. Si cette fcn est insatisfiable, alors il est toujours possible d'obtenir, à partir de C, une contradiction qui, sous forme clausale, équivaut à la clause vide. Ainsi si on veut automatiser la procédure de la détermination de l'insatisfiabilité, on peut envisager une méthode qui produirait des conséquences à partir de la fcn sous test et qui s'arrêterait dès que la clause vide serait engendrée.

Il est évident que cette technique peut aussi s'appliquer quand on veut établir qu'une formule est une conséquence logique d'un ensemble de formules, c-à-d. si on veut établir que $C \models A$. En utilisant le théorème de réfutation on sait que $C \models A$ ssi $C \cup \{\neg A\}$ est insatisfiable.

L'algorithme de résolution par réfutation est le suivant :

(1) Considérons une fnc $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ où les C_i sont des clauses disjonctives et soit la fbf $C \to A$ où A est une clause disjonctive.
Exemple : Soit la fbf $p \wedge (p \to q) \wedge (q \to r) \to r$ avec $C = p \wedge (p \to q) \wedge (q \to r)$ et $A = r$. On transforme C en fcn et on obtient $C = p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$.

(2) On écrit C sous forme ensembliste $C = \{C_1, \ldots C_n\}$.
Exemple : $C = \{p, \neg p \vee q, \neg q \vee r\}$

(3) On rajoute à cet ensemble la négation de la conclusion A et on obtient l'ensemble $S = \{C_1, \ldots C_n, \neg A\}$
Exemple : $S = \{p, \neg p \vee q, \neg q \vee r, \neg r\}$

(4) On cherche dans S un littéral p tel que S_P (sous-ensemble d'éléments de S contenant p) et $S_{\neg p}$ (sous-ensemble d'éléments de S contenant $\neg p$) soient non vides, c-à-d. $S_P \neq \emptyset, S_{\neg p} \neq \emptyset$. S'il n'y en a pas, A n'est pas une déduction logique de C et l'algorithme s'arrête.

Sinon on forme le résolvant de S par rapport à p : $R_S(p) = S_p \cup S_{\neg p}$ et on remplace S par $S = S - \left(\bigcup C_R(p) \bigcup \left(C_p^- \cup C_{\neg p}^-\right)\right)$

Exemple : $S_p = p$ et $S_{\neg p} = \neg p \vee q$. Le résolvant est $R_S(p) = \{q\}$.

(5) Si S se réduit à la clause vide, alors la déduction logique est valide.

Sinon, on retourne à (4).

Exemple : $S = \{q, \neg q \vee r, \neg r\}$. On continue $S = \{q, \neg q \vee r, \neg r\}, S_q = q, R_{\neg a} = \neg q$. Donc $R_S(q) = \{r\}$ et $S = \{r, \neg r\}$ d'où $C = \{\perp\}$ où $\perp$ représente la clause vide dont la valeur de vérité est Faux([7]). Par conséquent la fbf $p \wedge (p \to q) \wedge (q \to r) \to r$ est valide.

ASCÈSE 3.25 *Examiner si l'implication suivante*

$$\{p \to q, q \to r\} \models (p \vee q) \to r$$

est valide.

Nous pouvons aussi utiliser la règle de résolution pour examiner si une fbf A est valide. Pour ce faire on nie la fbf A et on cherche à montrer que cette négation conduit à une absurdité.

EXEMPLE 3.10.1 *Soit la fbf $A = (p \to \neg p) \to \neg p$. On nie la proposition et on a $\neg A = \neg[(p \to \neg p) \to \neg p]$. On traduit cette formule en fnc $\neg[(p \to \neg p) \to \neg p] \leftrightarrow \neg[\neg(\neg p \vee \neg p) \vee \neg p]$. Donc $C = \{\neg p \vee \neg p, p\} \leftrightarrow C\ \{\neg p, p\} \leftrightarrow C = \{\perp\}$ et donc la formule est valide dans la mesure où sa négation est absurde.*

Nous pouvons encore utiliser la règle de résolution pour calculer la conséquence d'une fbf. Dans ce cas il faut appliquer l'algorithme sans nier la fbf et récupérer la conclusion.

EXEMPLE 3.10.2 *Reprenons l'exemple précédent en considérant uniquement les prémisses : $A = (p \to \neg p)$. On applique l'algorithme à A, ce qui donne $C = \{\neg p \vee \neg p\} \Rightarrow C = \{\neg p\}$ c-à-d. que cette formule est équivalente à $\neg p$.*

3.11 Démonstration automatique

On termine ce chapitre en présentant un algorithme qui permet de prouver une fbf du calcul propositionnel. Il s'agit de la méthode de balayage qui accepte en entrée une fbf qui n'a pas des connecteurs de l'implication ou de la double implication et retourne soit $\top$ si la formule est prouvée, soit $\perp$ sinon.

L'algorithme est le suivant :

Debut

(1) Soit C une fbf sans les connecteurs de l'implication ou de la double implication Si ces connecteurs sont présents, on les élimine en appliquant les règles :

– $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$

7. N.B. La valeur de vérité d'une clause vide $\perp$ est Faux. Par contre la valeur de vérité d'un ensemble vide de clauses est Vrai. Car dans ce dernier cas, l'absence de clause signifie que cet ensemble est toujours vérifié.

– $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p$

(2) Tant que $C \neq \top$ ou $C \neq \bot$ faire

(3) Début

(a) Choisir un littéral p apparaîssant dans C.

(b) Remplacer C par la fbf $C(p/\top) \wedge C(p/\bot)$, où $C(p/a)$ est la fbf C dans laquelle on a remplacé chaque occurrence de p par a.

(c) On simplifie la formule, en appliquant autant que faire se peut les équivalences suivantes dans n'importe quel ordre :
– $\neg \bot \leftrightarrow \top$
– $\neg \top \leftrightarrow \bot$
– $p \vee \top \leftrightarrow \top$
– $p \vee \top \leftrightarrow p$
– $p \wedge \top \leftrightarrow p$
– $p \wedge \bot \leftrightarrow \bot$

(4) Fin Tant que

Fin

ASCÈSE 3.26 *Démontrer la fbf*

$$(p \to q) \to ((p \to q) \to \neg p))$$

en faisant les deux choix différents pour l'atome p, à savoir p et q.

Il faut remarquer que le choix du littéral à substituer influe sur la longueur de la solution. En règle générale, on préférera, pour diminuer la longueur de la solution, de commencer par le littéral qui est le plus fréquent dans la fbf.

3.12 Exercices

EXERCICE 3.1 *On se place dans l'univers des tribunaux de justice. Considérons la phrase*

Si Toto est innocent d'un crime, alors il n'est pas suspect.

(1) Écrire la proposition contrapositive et calculer sa valeur de vérité.

(2) Calculer la valeur de vérité de la phrase donnée.

(3) Écrire la proposition inverse et calculer sa valeur de vérité.

(4) Écrire la négation de cette phrase et calculer sa valeur de vérité.

EXERCICE 3.2 *Considérons l'opérateur logique* `nand` *dont la table de vérité est la suivante :*

p	q	p `nand` q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

(1) Trouver une proposition équivalente à $\neg p$ en utilisant uniquement le connecteur `nand`.

p	q	p ↓ q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(2) Trouver une proposition équivalente à $p \vee q$ en utilisant uniquement le connecteur `nand`.

(3) Trouver une proposition équivalente à $p \wedge q$ en utilisant uniquement le connecteur `nand`.

EXERCICE 3.3 *Considérons le connecteur $\downarrow$ dont la table de vérité est la suivante :*
Refaire le travail de Wittgenstein, qui définissait tous les autres connecteurs à partir de ce connecteur.

EXERCICE 3.4 *Soit la fbf*

$$A = (Q \wedge R) \rightarrow (P \leftrightarrow (\neg Q \vee R))$$

dans laquelle P, Q, R sont des variables propositionnelles.

(1) Déterminer une formule équivalente à A, écrite en utilisant uniquement les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$.

(2) Donner pour A la forme normale disjonctive la plus réduite.

(3) Montrer que les formules

$$B = R \rightarrow (Q \rightarrow (P \leftrightarrow (Q \rightarrow R))) \text{ et } C = R \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

sont équivalentes.

EXERCICE 3.5 *On additionne deux nombres binaires à deux digits ab et cd. Le résultat est un nombre à trois digits au plus : pqr. Utiliser le calcul propositionnel pour obtenir une expression de p, q, r en fonction de a, b, c, d.*

EXERCICE 3.6 *Donner la fcn de deux fbf ci-après :*

(1) $(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \wedge (r \rightarrow q))$

(2) $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

EXERCICE 3.7 *Protagoras était convenu avec son élève Euathlos qu'il paierait ses leçons que lorqu'il gagnerait son premier procès. L'élève refusant de plaider, Protagoras le poursuivit en justice en faisant le raisonnement suivant :*
Il gagnera ou perdra ce procès.
S'il gagne, il me paiera afin de respecter notre accord.
S'il perd, il me paiera afin de respecter le verdict des juges.
Donc, il me paiera.
Formaliser le raisonnement de Protagoras et donnez-en une démonstration.

EXERCICE 3.8 *Pour effectuer le test de bon fonctionnement d'un procédé de fabrication on vérifie la présence des quatre symptômes : S_1, S_2, S_3 et S_4. Lors des différents tests, nous avons observé que :*
- *Si S_1 et S_2 sont présents, alors un de S_3, S_4 est aussi présent.*
- *Si S_2 et S_3 sont présents, alors soit aucun de S_1, S_4 n'est présent, soit tous les deux sont présents.*

– *Si aucun de S_1 et S_2 n'est présent, alors aucun de S_3, S_4 n'est non plus présent.*
– *Si aucun de S_3 et S_4 n'est présent, alors aucun de S_1, S_2 n'est non plus présent.*

Faire le travail suivant :

(1) Traduire les observations en langage des propositions.

(2) Montrer que les deux propositions

(a) Les trois symptômes S_1, S_2 et S_3 ne peuvent pas être présents en même temps.

(b) Si les symptômes S_1, S_2 ne sont pas présents, alors S_3 n'est pas non plus présent.

sont valides, en utilisant

– *les tables de vérité ;*
– *l'algorithme de Davis-Putnam ;*
– *l'algorithme de résolution.*

EXERCICE 3.9 *Examiner si la proposition*

$$[(p \vee q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)] \rightarrow (p \vee r \vee \neg q)$$

est valide.

EXERCICE 3.10 *Soit le raisonnement d'Aristote*

– *S'il faut philosopher, alors il faut philosopher.*
– *S'il ne faut pas philosopher, alors il faut encore philosopher.*
– *Conclusion : il faut philosopher.*

Traduisez ce raisonnement et prouvez-le.

EXERCICE 3.11 *Bias, un de sages grecs de l'antiquité, tenait le raisonnement suivant contre le mariage :*

(1) Si vous vous marier, votre femme sera belle ou laide.

(2) Si elle belle, vous serez en proie à la jalousie.

(3) Si elle est laide, vous ne la supporterez pas.

Donc, il ne faut pas vous marier.

Montrer que le raisonnement n'est pas valide et trouvez les propositions à rajouter aux prémisses pour qu'il devienne valide.

EXERCICE 3.12 *Démontrer, en utilisant l'algorithme de balayage, la formule suivante :*

$$(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$$

Table des matières